

Н. В. Александрова

ИЗ ИСТОРИИ ВЕКТОРНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Издание второе,
исправленное и дополненное



URSS

МОСКВА

Александрова Надежда Вячеславовна

Из истории векторного исчисления. Изд. 2-е, испр. и доп.

М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2013. — 272 с.

(Физико-математическое наследие: математика (история математики).)

В настоящей книге излагается история векторного исчисления, возникшего как часть теории гиперкомплексных чисел. Рассказывается, как под влиянием сопредельных наук, в частности физики, векторное исчисление теории кватернионов было преобразовано в векторный анализ и какими драматическими коллизиями сопровождался этот процесс. Приводится ряд интересных фактов из творческой жизни Дж. Максвелла, Дж. Гиббса, Г. Грассмана, О. Хевисайда, Дж. Пеано и других выдающихся ученых, принимавших непосредственное участие в создании векторного анализа.

Книга предназначена для преподавателей математики, студентов, а также всех интересующихся математикой.

Рецензенты:

д-р физ.-мат. наук, проф. *К. А. Рыбников*;

д-р физ.-мат. наук, проф. *С. С. Демидов*

Издательство «Книжный дом «ЛИБРОКОМ»».

117335, Москва, Нахимовский пр-т, 56.

Формат 60×90/16. Печ. л. 17. Зак. № ВР-85.

Отпечатано в ООО «ЛЕНАНД».

117312, Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, 11А, стр. 11.

ISBN 978-5-397-03316-9

© Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2012

10639 ID 150298



Все права защищены. Никакая часть настоящей книги не может быть воспроизведена или передана в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами, будь то электронные или механические, включая фотокопирование и запись на магнитный носитель, а также размещение в Интернете, если на то нет письменного разрешения владельца.

Содержание

Предисловие	4
Глава 1. «Мнимые числа — убежище божественного духа»	6
Глава 2. «Любопытная цепь математических размышлений открылась мне»	30
Глава 3. «Мы на правильном пути»	54
Глава 4. «Ценность идеи вектора несказанна»	64
Глава 5. «Вектор не требует поддержки мнимости»	84
Глава 6. «Я верю — система представляет собой то, что хочет физик»	102
Глава 7. «Электромагнетизм кишит векторами»	127
Глава 8. «Векторы против кватернионов»	139
Глава 9. «Труд будет игнорироваться математиками» . . .	160
Глава 10. «Задача, поставленная Лейбницем, решена!» . .	178
Глава 11. «В векторных обозначениях царит хаос»	205
Глава 12. «Общий анализ одухотворен векторным исчислением»	216
Глава 13. «Знакомство с векторным исчислением начинает распространяться и в нашем Союзе» . .	233
Литература	254
Именной указатель	257

Предисловие

В первой половине XIX в. почти одновременно появилось несколько «геометрических исчислений» — иногда их создатели исходили из существенно различных математических проблем, а иногда теории совпадали даже в деталях (хотя независимость исследований несомненна). Этот факт привлекал внимание Гиббса, Пуанкаре, Ли и других ученых. В частности, Пуанкаре считал, что Декарт, сведя геометрию к алгебре, вызвал реакцию — развитие синтетической геометрии: этим объясняется появление самых различных идей Мёбиуса, Плюккера, фон Штаудта, Грассмана. А в наши дни голландский математик А. Ф. Монна распространяет эту реакцию и далее: «Стремление к методу, не связанному с координатами, имеет аналогии в виде функционального анализа, где встречается переход от специального пространства — такого, например, как пространство последовательностей l^2 к абстрактным определениям линейного пространства» [70, с. 93].

Таким образом, к началу XX в. существовали различные «векторные системы»: теория кватернионов, учение Грассмана, винтовое исчисление Болла, исчисления А. П. Котельникова, Клиффорда, векторное исчисление итальянской школы и др. Поэтому можно считать случайностью тот факт, что получил распространение именно «наш» вариант.

Оказалось, векторное исчисление может служить языком тех областей математики, которые, на первый взгляд, не связаны между собой. Родившись в теории гиперкомплексных чисел, оно явилось естественным математическим аппаратом в теории электричества и магнетизма, а также аналитической геометрии и механики... и наложило известный отпечаток на развитие аксиоматического метода, на исследования по основаниям геометрии и теории линейных пространств. От этих исследований только

один шаг до функционального анализа, теории интегральных уравнений, теории гильбертова пространства... Именно об этом повествует настоящая книга.

Включение элементов истории в преподавание позволяет «смягчить» сухость дедуктивного метода преподавания, который время от времени вызывает протесты педагогов. Такой протест выражен в самой резкой форме М. Клайном в парадоксальной, интересной статье «Логика против педагогики»: «Дедуктивное доказательство является альфой и омегой преподавания. Увлечение этой формой изложения отчасти понятно... Таким образом, сосредоточив внимание на дедуктивной стороне, мы выпускаем из виду активность математического процесса. Логическая формулировка создает наряд этой активности, но скрывает ее кровь и плоть. Она подобна одежде, которая украшает женщину, но не является женщиной...» [24, с. 46].

История открытия — одно из средств (а может быть, и единственное средство) сделать читателя хотя бы в какой-то степени свидетелем открытия, что так интересно и так важно для понимания логики развития математики и самой ее логики. Можно сослаться и на мнение Пуанкаре: «В ее строго логической форме математическая дисциплина принимает столь искусственный характер, что ставит в тупик любого. Забывая исторические истоки, мы видим, как вопросы могут быть разрешены, но перестаем понимать, как и почему они были поставлены» [24, с. 54].

Автор надеется, что предлагаемая в этой книге информация пригодится читателю, который впервые будет знакомиться с теорией кватернионов, поскольку, по мнению многих ученых, предстоит «второе рождение» этой теории — она понадобилась физике, главным образом квантовой механике. Книга также будет полезна преподавателям математики и студентам технических вузов.

Моя сердечная благодарность Изабелле Григорьевне Башмаковой, а также Г. А. Каменскому и А. Л. Скубачевскому, которые проявляли интерес к работе и оказывали неоценимую поддержку, не слабеет, а только возрастает со временем.

Глава 1

«Мнимые числа — убежище божественного духа»

В. Г. Лейбниц

В начале XIX в. в работах нескольких ученых появилась геометрическая интерпретация комплексных чисел и операций с направленными отрезками плоскости.

Удивительно, как рано авторы таких работ начали пытаться развить и теорию «сверхкомплексных» чисел — таких чисел, кото-

рые изображались бы точками трехмерного пространства. Эти поиски начались в 1796–1806 гг., когда и функций-то комплексной переменной еще не было, когда еще не родились ни Вейерштрасс, ни Риман, когда еще не было ни публикаций Коши, ни рецензий на них: «Выдумки Коши — вздор, способный запутать умы...», «Мы оставим в стороне формулы метафизического происхождения, изобретателем которых был Коши и которые никто и никогда не будет употреблять...» [1, с. 112].



В. Г. Лейбниц

Таким образом, истоки векторного исчисления надо искать в теории функции комплексной переменной (ТФКП), и прежде чем перейти к рассмотрению собственно развития векторного исчисления, необходимо дать хотя бы беглый обзор состояния ТФКП к началу XIX в.

Уже к XVI в. математики наткнулись на мнимые корни уравнений. Джироламо Кардано* выпросил у Тарталья «секрет» решения кубических уравнений, поклявшись не публиковать стихи, содержавшие «рецепт», а через 6 лет (1545) он обнародовал способ решения; формулы до сих пор называются *формулами Кардано*.

Кардано считал квадратные корни из отрицательных величин разновидностью отрицательных чисел и называл их «чисто отрицательными».

Затем комплексные числа встречаются в 1572 г. в «Алгебре» Бомбелли. Как писал Ф. Клейн: «Помимо и даже против воли того или иного математика, мнимые числа снова и снова появляются при выкладках, и лишь постепенно, по мере того как обнаруживается польза от их употребления, они получают все более и более широкое распространение.

Конечно, математики делали это не с легким сердцем: мнимые числа долго сохраняли несколько мистическую окраску. Для подтверждения я хочу привести одну крайне характерную фразу Лейбница, относящуюся к 1702 г. Вот она: мнимые числа — это прекрасное и чудесное убежище божественного духа, почти что сочетание бытия с небытием» [25, т. I, с. 85].

Предубеждение (или мистический ужас, или желание отгородиться) сквозят и в названиях, которые давали таким числам:

* Кардано был врачом и великим астрологом своего времени. Он даже опубликовал гороскоп Христа, за что поплатился заключением «для укрепления в вере». Его вызвали в Лондон к юному королю Эдуарду VI. Как врач Кардано понимал, что мальчик умирает, однако как политик (и человек, обладающий инстинктом самосохранения) он составил гороскоп короля, по которому Эдуарда ожидала долгая жизнь и блестящее царствование. В своем собственном гороскопе Кардано предрекал себе смерть в 75 лет; полагают, что он уморил себя голодом, чтобы не посрамить свое великое искусство. Годы его жизни 24 сентября 1501 г. — 21 сентября 1576 г.

вспомогательные, вымышленные, софистические, невозможные, мнимые (Декарт, 1637). Впервые обозначение $\sqrt{-1} = i$ по первой букве латинского слова *imaginariae* — «воображаемый», ввел в 1777 г. Эйлер. Однако повсеместное употребление это обозначение получило благодаря тому, что его принял Карл Гаусс. Л. Карно (1803), а позднее Гаусс (1831) ввели понятие *комплексное число* — «сложное, составное».

Практически незамечено построенное Виетом «исчисление прямоугольных треугольников». Операции с ними тождественны сложению и умножению комплексных чисел. Это заметила И. Г. Башмакова (публикации 1977, 1986 гг.).

Попытку дать геометрическую интерпретацию мнимым числам и, следовательно, оправдать их существование, предпринял Валлис. Он посвятил этим числам четыре главы своей «Алгебры» (1685). Если говорить современным языком, то отложив на действительной оси -1 и $+1$, а на оси Oy $+1$, Валлис получает равнобедренный прямоугольный треугольник, в котором высота есть среднее пропорциональное $\sqrt{(-1) \cdot (+1)}$ отрезков $+1$ и -1 . Отсюда следует вывод, что мнимые числа надо откладывать на оси Oy . Кажется, остался только один шаг до того, чтобы комплексные числа представить точками плоскости. Но... «поднятая нога» ступила на землю только через столетие. К тому же замечание о том, что отрицательные решения уравнений следует откладывать на оси Ox в сторону, обратную положительным, тоже было новинкой — его сформулировал Альберт Жирар только в 1629 г. в «Новом открытии в алгебре». Жирар также впервые сформулировал *основную теорему алгебры*:

Алгебраическое уравнение имеет столько корней, сколько единиц в показателе степени неизвестной величины.

Он делает попытку объяснить, оправдать, доказать полезность употребления мнимых: «Можно было бы спросить, кому нужны решения, которые невозможны? Я отвечаю: они нужны для трех вещей — для справедливости общего правила, чтобы убедиться, что нет других решений, и ради своей полезности!» [7, с. 29]. Жирар впервые признал нуль корнем уравнения и, сле-

довательно, числом. Ньютон не считал нуль числом, как не считал числами и мнимые величины.

Одна из первых попыток представить мнимые числа геометрически была сделана Кюном, учителем в Данциге (1750). Отзыв современника: «в этой статье много неправильных взглядов и странных чудачеств». Некоторые авторитеты полагали даже, что не стоит труда читать статью Кюна. Геометрическую интерпретацию мнимых изобретали много раз (как «впервые») и каждый раз сталкивались с непониманием, подозрениями, пренебрежением.

Наконец, уже в наши дни И. Г. Башмакова распознала в операциях с прямоугольными треугольниками, которые ввел Виет, самые настоящие действия с комплексными числами (очерк был опубликован лишь в 1654 г., после смерти автора).

Формальные операции с мнимыми числами начали постепенно употребляться с развитием интегрального исчисления. При интегрировании рациональных дробей Лейбниц разложил на множители $x^4 + a^4$ (1702–1703). В это же время он и Иоганн Бернулли, разложив на простые дроби $1/(x^2 + 1)$ и проинтегрировав $1/(x \pm i)$ по правилам, справедливым для действительных выражений, нашли связь между арктангенсом действительного аргумента и логарифмом мнимого.

Фундаментальное соотношение между тригонометрическими функциями и показательной установил в 1714 г. Роджер Коутс, друг и ученик Ньютона. Это соотношение было опубликовано в посмертной работе Коутса (1722) в виде, эквивалентном выражению

$$xi = \log_e(\cos x + i \sin x).$$

Эйлер пришел к этой формуле в 1740 г. Решая дифференциальное уравнение

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0,$$

он увидел, что уравнению удовлетворяют функции

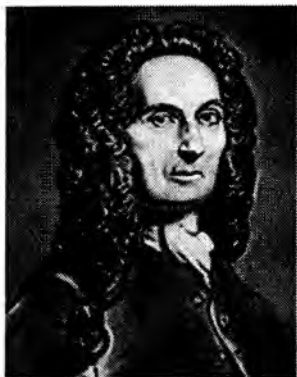
$$y = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) \quad \text{и} \quad y = \cos x,$$

формулу он сообщил Даниилу Бернулли, а опубликовал ее в 1748 г.

В 1707 г. Абрахам де Муавр привел без вывода общее выражение для корня степени n ; его формулировка равнозначна следующей:

$$\sin \varphi = \frac{1}{2} \sqrt[n]{\sin n\varphi + i \cos n\varphi} + \frac{1}{2} \sqrt[n]{\sin n\varphi - i \cos n\varphi}.$$

В современном виде формулу Муавра записал Эйлер в 1748 г. Он ввел и обозначения тригонометрических функций $\sin x$, $\cos x$



А. де Муавр

(равно как и эти функции, которые до тех пор рассматривались только как отрезки в круге).

Наука создавалась не в той последовательности, которая принята в современных учебных программах: в то время дифференциальное исчисление было уже привычным, а в учении о логарифмах ясности не было. Поэтому в споре о существовании логарифмов отрицательных чисел (1712–1713) И. Бернулли доказывал, что

$$\log(-x) = \log(x),$$

ибо дифференциалы этих функций равны. Следовательно,

$$\ln(-1) = 0.$$

Аргументация его оппонента — Лейбница — тоже выходила за рамки элементарной математики: было уже известно разложение

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

Тогда

$$\ln(-1) = \ln(1-2) = -2 - \frac{2^2}{2} - \frac{2^3}{3} - \dots \neq 0.$$

Обсуждение продолжалось в переписке Эйлера с И. Бернулли (с 1727 г.), а затем с Даламбером. Эйлер считал, что логарифмы

отрицательных чисел — мнимые, и доказал, что логарифм каждого числа имеет бесконечное множество значений, отличающихся на $2k\pi i$. Но даже такой математик, как Даламбер, не понял (или не принял) точку зрения Эйлера: «Из всех размышлений следует... — писал Даламбер, — что безразлично предполагать логарифмы отрицательных количеств вещественными или мнимыми. Все зависит единственно от выбора системы логарифмов» (1761). Поэтому в распространенном курсе математического анализа Лакруа подведен итог: «Теория Эйлера принята теперь согласием наиболее выдающихся анналистов. Несмотря на это, следует сознаться, что вопрос о логарифмах отрицательных чисел не свободен еще, быть может, от некоторых туманностей...» (1810!).

Ко времени спора о логарифмах еще не все математики разобрались в том, что всевозможные «мнимости» (возникающие и при решении уравнения $x^2 + a^2 = 0$, и при логарифмировании $\lg(-a^2)$, и все прочие) имеют одну и ту же природу — это все комплексные числа вида $a + b\sqrt{-1}$. К признанию этого факта привела дискуссия Эйлера с Даламбером.

И все-таки во «Введении в анализ бесконечных» (1748) Эйлер должен был особо оговаривать и подчеркивать, что «переменная величина охватывает решительно все числа... Даже нуль и мнимые числа не исключаются из значений переменной величины» [1, с. 30]. Интересно, что во втором томе этой книги, где переменным величинам дается геометрическое истолкование, Эйлер писал исключительно о действительных величинах, что еще раз показывает, как труден был этот шаг — представлять числа точками плоскости, труден даже для Эйлера, который был очень близок к такой геометрической интерпретации. Во-первых, в его работах уже встречался переход от записи комплексного числа $x \pm \sqrt{-1}y$ к тригонометрической форме $s(\cos \omega \pm i \sin \omega)$, во-вторых, в работе «О представлении сферической поверхности на плоскости» (1777) он переходил от точек (x, y) плоскости (географической карты) к комплексным числам $x + iy$, выражая их через долготу и широту точек сферы, а затем снова возвращался к координатам x и y [31, с. 117].

«Хотя Эйлер и дал геометрически наглядное изображение комплексных чисел на круте, он не приписывал им никакого реального значения, а видел в них лишь целесообразное соглашение при вычислениях. Эту точку зрения передает термин *воображаемые числа*, принадлежащий Эйлеру. Введенные в 1843 г. Гамильтоном кватернионы, которые являются обобщением понятия комплексного числа, по сути имелись уже у Эйлера» [39, с. 109]. Единственным основанием для этого утверждения являются вера во всеобъемлющие интересы Эйлера и всемогущество его гения, а также чисто внешнее обстоятельство, что он оперирует с *четверками* чисел. На самом деле Эйлер решает теоретико-числовые проблемы (родственные формулам Ферма), и цели, методика, смысл не имеют никакого отношения к кватернионам.

К концу XVIII в. Лагранж имел уже веские основания утверждать: «Одним из важнейших шагов, сделанных анализом в последнее время, я считаю то, что его более не затрудняют мнимые величины и что вычисления с ними производятся так же, как и с действительными величинами» [31, с. 116].

Первые наброски Гаусса на эти темы относятся к 1797 г. Однако его глубокие идеи находились за семью печатями (как это было со многими открытиями Карла Гаусса). В 1811 г. в письме к Бесселю он явно высказался: в числе $a + ib$ слагаемое a есть абсцисса, а b — ордината точки. Но опубликована им геометрическая интерпретация комплексных чисел только в 1831 г. В 1808 г. в письме к Шумахеру Гаусс сообщает о другой идее: «Великолепный золотой родник, хранящий сокровенное высших функций, остается пока что *terra incognita*» — Гаусс открыл фундаментальную теорему теории функций комплексной переменной (за 14 лет до Коши) о том, что интеграл по замкнутому контуру определяется тем, какие особые точки лежат внутри контура интегрирования. О его заметках по обобщению комплексных чисел (с 1819 г.) будет рассказано несколько дальше. Работы Гаусса, будь они опубликованы своевременно, оказали бы, конечно, значительное влияние на создание теории гиперкомплексных чисел.

Однако основоположником ТФКП стал Огюстен Коши, и в этой теории используется многое из его терминологии: он называл числа $a + ib$ и $a - ib$ *сопряженными*; $\sqrt{a^2 + b^2}$ — *модулем*, *вычет* — также его термин. Коши стал употреблять обозначение i только с 1830 г., до тех пор у него фигурировал $\sqrt{-1}$.

Коши «дал пример бесстрашному обращению с комплексными величинами». Тем не менее он проделал сложный и долгий путь «к геометрическому истолкованию комплексных чисел. Понимание им комплексного числа менялось почти на протяжении всей его творческой деятельности» [31, с. 118]. В 1827 г. Коши знал, что «всякое мнимое значение может быть представлено в виде $z = re^{\rho\sqrt{-1}}$, где r означает некоторую положительную величину, называемую модулем, а ρ — действительную переменную, содержащуюся между двумя пределами $-\pi$ и π . Можно думать, что r и ρ представляют две полярные координаты...» [1, с. 107]. В 1847 г. он предлагает рассматривать i как «действительное, но неопределенное количество». В том же году Коши «после новых и зрелых размышлений» решил полностью отказаться от знака $\sqrt{-1}$ и заменить теорию мнимых выражений теорией геометрических количеств; $x + iy$ он стал называть *аффиксом* точки $A(x, y)$.

Клейн писал: «Коши... отнюдь не был классиком по форме изложения. Подавляющее большинство его работ... носит по мере развития все более спешный, эскизный характер. Бесконечное число раз повторяет он уже сказанное ранее, чтобы в связи с прежней, незаконченной работой изложить блеснувшую идею, снова не доведя ее до конца. Все работы Коши переизданы в собрании его сочинений. Издание это, однако, очень мало облегчает проникновение в дремучую чащу трудов Коши; в нем без разбора, в хронологической последовательности, собрано все — и важное и неважное...» [23, с. 106].

Воззрения Коши в начале его исследований были близки к взглядам математиков времен Кардано: комплексные числа (мнимые) полезны, этим оправдано их употребление, независимо от того, что это такое. Согласно А. И. Маркушевичу, «В 1821 г. он <Коши> относит мнимые выражения и мнимые уравнения

к разряду символических, понимая под ними такие, которые взятые буквально или не точны, или лишены смысла, но из которых можно выводить точные результаты, модифицируя и меняя по определенным правилам либо сами уравнения, либо символы в них» [31, с. 118].

С таким «символическим подходом» Коши мог естественно перейти на путь английской школы, однако его творчество пошло по другому руслу. Работы Коши не имеют отношения к истории гиперкомплексных чисел и поэтому упомянуты здесь только наравне с другими, гораздо менее важными для развития ТФКП.

И для векторного исчисления, и для теории комплексных переменных отыскание геометрического смысла комплексных чисел являлось очень важной задачей: «...можно было числа, составленные из $\sqrt{-1}$, называть невозможными до тех пор, пока мы для них не придумали какой-нибудь наглядной интерпретации...

Но с тех пор, как геометрический смысл чисел $x + iy$ был открыт и операции над ними получили геометрическое толкование, их ни в коем случае нельзя называть невозможными; они так же реальны, как положительные и отрицательные числа...» [10, с. 16].

* * *

Уже в первых работах, в которых объектами операций были направленные отрезки плоскости, предпринимались попытки распространить такое исчисление на случай пространства трех измерений. Вероятно, самой последовательной из них была статья Каспара Весселя «Опыт аналитического представления направления и его применения, преимущественно к решению плоских и сферических многоугольников».

В 1797 г. Вессель представил академии наук в Копенгагене свой единственный научный труд, который будет опубликован через два года. Через 200 лет в Копенгагене состоится симпозиум в честь выхода этой статьи. Это замечательное сочинение в 60 страниц посвящено «поискам некоторого метода, позволяющего избегать невозможных операций», т. е. действий с мнимыми числами.

Around Caspar Wessel and the Geometric Representation of Complex Numbers

Proceedings of the Wessel Symposium
at The Royal Danish Academy of Sciences and Letters
Copenhagen, August 11-15 1998

Invited Papers
Edited by Jesper Lützen



Matematisk-fysiske Meddelelser 46:2
Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskab
The Royal Danish Academy of Sciences and Letters

Commission Agent: C.A. Reitzels Forlag
Copenhagen 2001

Титульная страница: Труды симпозиума,
посвященного 200-летию статьи К. Весселя

Вессель не определяет *направленный отрезок*, но формулирует два очевидных положения:

«1. Изменение направления, происходящее от применения алгебраических операций, должно записываться с помощью соответствующих алгебраических символов.

2. Направление можно относить к алгебре только в том случае, если удастся его изменение подчинить алгебраическим операциям» [26, с. 229].

Это означает, что Вессель хорошо понимал — его термины *сумма*, *плюс*, *произведение* охватывают, как частный случай, соответствующие понятия обыкновенной алгебры и поэтому допустимы. Он дал такое определение суммы направленных отрезков: «Сложение двух отрезков производится следующим образом: располагаем их так, чтобы начальная точка одного из них находилась там, где другой оканчивается. Затем соединяем новым отрезком оба конца полученной ломаной линии; этот новый отрезок назовем суммой данных двух отрезков» [26, с. 231]. Вессель строил сумму направленных отрезков так и только так, ни разу сумма двух отрезков не представляется диагональю параллелограмма.

Вессель записывает комплексные числа и как $x + \epsilon y$, и в виде $r(\cos u + \epsilon \sin u)$. Рассматривая произведение двух чисел, он, конечно, получает формулу

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(u + v) + \epsilon \sin(u + v)]$$

и таким образом дает геометрическую интерпретацию действиям умножения и деления двух направленных отрезков плоскости. Наконец, он пытается развить аналогичное исчисление с отрезками пространства. Радиусы сферы $r, \epsilon r, \eta r$ он принимает за оси системы координат. «Единицы ϵ, η являются перпендикулярами к радиусу $+1$ и удовлетворяют условиям $\epsilon^2 = -1, \eta^2 = -1 \dots$ радиус, оканчивающийся в точке сферы с координатами x, y, z , будем записывать в виде $x + \epsilon y + \eta z$ » [26, с. 235].

Основная трудность состоит в определении произведений $\epsilon \eta, \eta \epsilon$ (эта трудность впоследствии задержала Гамильтона на 10 лет). Очевидно, Вессель заметил некоммутативность произведения,

т. е. увидел, что его операции отличаются от умножения алгебры. Поэтому он ввел особый знак " для обозначения этой операции, но назвал ее все-таки *умножением*. Чтобы исключить произведения $\varepsilon\eta$ и $\eta\varepsilon$, он применяет следующий маневр: из всех возможных вращений отрезка в пространстве он рассматривает только вращения вокруг двух неподвижных осей Oy и Oz (в современных обозначениях). Во-первых, любое преобразование отрезка OM в OM' можно выполнить, произведя последовательно такие «допустимые» повороты радиус-вектора. Во-вторых, каждый из этих поворотов сводится к плоскому случаю.

В самом деле вращение радиус-вектора точки $x + \varepsilon y$ в плоскости xOy на угол φ выполняется при умножении

$$(x + \varepsilon y)(\cos \varphi + \varepsilon \sin \varphi) = x' + y'.$$

Ну а при вращении радиус-вектора $x + \varepsilon y + \eta z$ вокруг оси Oz каждая точка этого радиус-вектора описывает окружность в плоскости $z = \text{const}$. Поэтому

$$\eta z + (x + \varepsilon y)(\cos \varphi + \varepsilon \sin \varphi) = \eta z + x \cos \varphi - y \sin \varphi + \varepsilon(x \sin \varphi + y \cos \varphi).$$

Аналогично вращение радиус-вектора вокруг оси Oy происходит при постоянном значении y для каждой точки и описывается аналогичным выражением

$$\varepsilon y + (x + \eta z)(\cos \theta + \eta \sin \theta) = \varepsilon y + x \cos \theta - z \sin \theta + \eta(x \sin \theta + z \cos \theta).$$

«Таким образом, оригинальная мысль о том, чтобы связать произведение направленных отрезков в пространстве трех измерений с вращениями этого пространства, принадлежит Весселю. Многие математики первой половины XIX века настойчиво стремились обобщить алгебру двумерных комплексных чисел на пространство трех измерений. Их предшественником был Вессель; он продвинулся в решении этой проблемы дальше всех» [26, с. 240].

Статья неизвестного датского землемера не привлекла внимания математиков. Ее «открыли» лишь сто лет спустя (1895); статью опубликовал Софус Ли, а затем она издана к ее столетию в переводе на французский язык.

На развитие векторных методов большое влияние оказала книга Лазара Карно «Геометрия положения» (1803). Карно сформулировал определение суммы направленных отрезков как замыкающей ломаной линии; он ввел понятия ориентированной площади и других ориентированных «геометрических количеств» положительного и отрицательного направлений обхода контура. А самое главное — работа Карно приобрела широкую известность, и его идеи сразу же стали достоянием науки и нашли много последователей, среди которых Сен-Венан, Резаль, Арган. Влияние Карно сказалось и на языке математики: сумму векторов долгое время называли «геометрической суммой», а впоследствии и произведение «геометрическим произведением».

Как развитие идей Карно представил свое исследование Жан Арган. Книга этого швейцарского математика, жившего в Париже, «Опыт о способе изображения мнимых количеств в геометрических построениях» (1806) вначале осталась совершенно незамеченной. В 1813 г. к ней привлек внимание Лежандр, в результате она была переиздана и вызвала дискуссию, в которой приняли участие Жергонн, Арган и другие математики — Франсэ, Сервуа, Лакруа. В основном дискуссия была посвящена «распространению теории мнимых количеств на геометрию трех измерений». Обсуждалось предложение Аргана изображать число $(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}}$ единичным отрезком, перпендикулярным к плоскости чисел $x + \sqrt{-1}y$! Арган называл векторы *линиями в направлении* (*lignes en direction*).

В это же время, в 1806 г., в Англии была опубликована статья французского эмигранта аббата Бюэ «Мемуар о мнимых количествах», основная идея которой состояла в том, что $\sqrt{-1}$ не знак количества, а знак геометрической операции, знак перпендикулярности. В 1828 г. вышли еще две работы — Дж. Уоррена и Муррея, о котором известно только, что он автор статьи «La Vrai Théorie des Quantités Négatives et des Quantités prétendues Imaginaires» («Истинная теория отрицательных величин и величин, называемых мнимыми», 1828).

Уоррен писал о том, что требуется пересмотр принципов, определений алгебры: «Должны быть созданы другие определе-

ния и аксиомы такого содержания, чтобы их можно было с одинаковым успехом применять к обоим классам количеств — действительных и мнимых». В английской математической школе очень сильно было течение *символической алгебры*, и Уоррен выступил как ее представитель.

Мурей в своей статье наряду с «единицами» направления и «единицами» поворота ввел «различные единицы умножения» и установил правила умножения для них. Впоследствии при исследовании «триплетов» Гамильтон также рассматривал операции умножения $\times_1, \times_2, \times_3$.

Наконец, в Италии с 1832 г. начали появляться публикации Джустио Беллавитиса. Он ставил перед собой цель «...найти алгоритм, который бы представлял в вычислениях одновременно величину и положение различных частей фигур; из нашего метода непосредственно следуют изящные и простые графические решения задач геометрии...» [26, с. 283]. Беллавитис развил своеобразную аналитическую геометрию на плоскости, он долго и безуспешно пытался обобщить свой «метод эквиполенций» на отрезки пространства. Ему не удалось это и в книге «Теория эквиполенций» (1854), подытожившей его исследования. (Но только одного его впоследствии считали предшественником Грассмана.) Хотя символ i уже вошел в обиход, Беллавитис хотел его исключить и, например, употреблял вместо него букву r , читая этот знак *radice* — сокращение выражения *radice di meno uno*, что значит «корень из минус единицы».



Дж. Беллавитис

Самым авторитетным математиком мира — Гауссом — геометрическая интерпретация комплексных чисел была введена в «Теории биквадратичных вычетов» (1831), и именно с этого времени она признана, широко известна и общеупотребительна. Гаусс несколько раз разными словами объясняет такое построение: нужно разбить неограниченную плоскость на квадраты

двумя системами взаимно перпендикулярных прямых и рассмотреть точки пересечения. Каждая точка имеет четыре соседних. Если переход к одной из них обозначить через $+1$, то переход к противоположной будет -1 , а переходы к двум другим соседним точкам определятся как $+i$ и $-i$. Итак, — повторяет Гаусс, — $+1, -1, +i, -i$ нужны для различения понятий *налево, направо, вперед, назад*, и, наконец, заключает: «Если $+i, -i$ называть не „положительная, отрицательная мнимая“, а „прямая и обратная боковая единица“, то можно избежать какой бы то ни было неясности (темноты) в речи» [53, т. II, с. 178].

Принял ли Гаусс термин Карно *комплексное (сложное) число* или вновь изобрел его, но только после его статьи это название стало признанным термином.

Когда начали издавать рукописи, записные книжки и прочие неопубликованные при жизни Гаусса материалы, обнаружилось, как часто Гаусс воздерживался от публикации своих идей. Они десятки лет хранились в его записных книжках, в письмах. Вероятно, соображения, относящиеся к теории кватернионов (так сказать) Гаусс не стал развивать потому, что основная, принципиальная часть проблемы была уяснена, а рутинной работой, требующей аккуратности ремесленника, заниматься было скучно. Во всяком случае в записных книжках, относящихся, как полагают, к 1819 г., есть заметки о «мутациях пространства». Наметки теории гиперкомплексных чисел опубликованы в «Трудах» Гаусса (Werke. 1900). Вторая, более поздняя серия записей содержит два отрывка, которые, собственно говоря, подводят итог всему, написанному ранее: «Уже в течение долгого времени я привык выражать каждую мутацию пространства четырьмя величинами a, b, c, d , комплекс которых я называю мутационной шкалой (под мутацией я понимаю преобразование пространства в некоторое другое пространство, связанное с величинами первого подобия). Одновременно предполагается, что одна точка пространства, преобразующегося в другое, остается закрепленной или абсолютно неподвижной; эту точку можно принять за нулевую» [53, т. VIII, с. 364].

Гаусс подошел к решению проблемы (в общих чертах) так, как это излагает Ф. Клейн: при перемножении комплексных

чисел

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{(\varphi_1 + \varphi_2)i}$$

«оператор» (z_1) растягивает вектор z_2 в r_1 раз и поворачивает на угол φ_1 ; комплексное число $x + iy$ содержит столько же слагаемых, сколько параметров характеризуют преобразование вектора. Так как аналогичное преобразование вектора в пространстве (растяжение и вращение на определенный угол вокруг некоторой оси) можно задать четырьмя параметрами (растяжением, углом поворота и двумя числами, определяющими ось вращения), то гиперкомплексное число должно содержать четыре слагаемых. У Гаусса «мутация пространства» и определяется четверкой чисел, а поясняя геометрический смысл величин a, b, c, d , он получает направляющие косинусы оси вращения, коэффициент растяжения, угол поворота.

Другой отрывок, состоящий из нескольких строк, посвящен объяснению геометрического смысла этих четырех величин. Гаусс приходит к формулам, которые только обозначениями отличаются от соответствующих формул теории кватернионов. В ранних записях он рассматривает преобразование, состоящее в последовательном выполнении двух «мутаций», и дает определение произведения двух мутационных шкал (аналогичное произведению двух кватернионов, конечно).

Когда записи Гаусса были обнаружены, Ф. Клейн написал о них небольшую статью (1899); собственно, факты были настолько интересны, очевидны и красноречивы, что не требовали комментариев. Тем не менее статью восприняли в Ирландии как претензию на приоритет (в ущерб Гамильтону). Тэт и Нотт (в одном и том же номере журнала) поспешили с опровержениями: оба они подчеркивали алгебраический характер кватернионов. Статья Тэта интересна не своим содержанием, а названием: «Недавние претензии проф. Клейна на изобретение (не открытие) кватернионов Гауссом». Эти статьи (и, по-видимому, разговоры) вызвали следующую реакцию Клейна: «Переходя теперь к более подробному изложению теории кватернионов... я ясно понимаю, что становлюсь на позицию, резко противоречащую позиции „гамильтонианцев“, глава которых придал своему открытию совсем

другой внешний облик. Больше того, я знаю, что эта группа еще и теперь оспаривает право называть кватернионами все то, о чем я собираюсь... говорить здесь... Однако я слишком часто убеждался в тщетности всякой попытки установить взаимное понимание, чтобы хоть сколько-нибудь принимать в расчет эти возражения» [23, с. 224].

По лаконичности, ясности постановки задачи и целенаправленности в ее решении в предыстории теории кватернионов нет ничего, равного записям Гаусса. Но до создания *исчисления* дело просто не дошло. Учение о кватернионах — творение Гамильтона.

В 1826 г., когда Гамильтона интересовали, главным образом, динамика и геометрическая оптика, Дж. Т. Грейвс сообщил ему результаты своих исследований о логарифмах мнимых. Это послужило одним из импульсов для дальнейших размышлений Гамильтона: «...важно рассказать о работах представителей английской школы символической алгебры. Своеобразие этих работ состоит в том, что, с одной стороны, в них не было создано никаких законченных и вошедших затем в математику результатов, с другой — были высказаны в первоначальной несовершенной форме фундаментальные идеи, освоение которых составляет эпоху в истории математики, продолжающуюся и по настоящее время» [32, с. 70].

Об этих работах ученых разных стран, о том, что именно было достигнуто к началу исследований (1830), об истории своего открытия Гамильтон подробно и доверительно рассказывает в предисловии к «Лекциям о кватернионах» (1853). Он не ведет читателя логически прямым путем, а заводит его в те же тупики, в которые попадал и сам, достигая тем самым временами прямо-таки драматического эффекта.

Несмотря на то, что Гамильтон заранее объявил, что не имеет «претензии писать историю науки и даже — историю одного раздела математических рассуждений», в предисловии приведен не только «отчет о развитии... собственных мыслей», но и почти исчерпывающий обзор всех работ по комплексным и гиперкомплексным числам. В 1830 г. Гамильтон был знаком лишь с работами английских авторов — Валлиса, Уоррена, Бюэ...; к 1853 г.

ему были знакомы все исследования, кроме двух самых важных — он не знал о работе Весселя и не мог знать о размышлениях Гаусса.

Ясно, что в работах алгебраистов того времени обоснование «геометрии мнимых» и изучение алгоритма алгебры — анализ алгебраических операций и свойств объектов, с которыми оперируют в алгебре, были связаны теснейшим образом.

Забегая немного вперед, скажем, что Гамильтон, пытаясь четко сформулировать задачу и уяснить, какие же именно «числа» он хочет найти и какими свойствами должны обладать искомые «количества», выписал следующие условия:

1. Ассоциативность сложения и умножения:

$$(Q_1 + Q_2) + Q_3 = Q_1 + (Q_2 + Q_3), \quad (Q_1 Q_2) Q_3 = Q_1 (Q_2 Q_3).$$

2. Коммутативность:

$$Q_1 + Q_2 = Q_2 + Q_1, \quad Q_1 Q_2 = Q_2 Q_1.$$

3. Дистрибутивность:

$$(Q_1 + Q_2) Q_3 = Q_1 Q_3 + Q_2 Q_3.$$

4. Однозначность деления:

$$\text{если } Q_1 X = Q_2,$$

то определяется одно и только одно число X .

5. «Закон модулей»:

$$\text{если } Q_1 Q_2 = Q_3,$$

то $|Q_1| \cdot |Q_2| = |Q_3|$ (в современных обозначениях).

6. Взаимно однозначное соответствие между точками трехмерного пространства и новыми числами Q .

Так в этих исследованиях появились ассоциативный, коммутативный и дистрибутивный законы; термин *ассоциативность* ввел Гамильтон (1843), *коммутативность* и *дистрибутивность* — французский математик Сервуа (1815).

Ближайшее математическое окружение Гамильтона — алгебраисты. Это братья Грейвс, Джон Томас и Чарлз, Август де Морган. Так что естественными кажутся и обращение Гамильтона к кругу алгебраических вопросов, и знакомство с работами по символической алгебре. Некоторые замечания в его трудах о справедливости результатов, независимо от интерпретации символов, характерны именно для исследований символической алгебры.

«Трудности, которых так много встречается в доктрине отрицательных и мнимых величин в алгебре, привлекли мое внимание много лет назад», — такими словами Гамильтон начинает «Лекции о кватернионах». Чтобы было совершенно ясно, о каких трудностях идет речь, процитируем предисловие к книге «Начала алгебры» (1796) члена Совета Кембриджского университета У. Френда: «Любое число допустимо вычитать из большего числа, но любая попытка вычесть какое-либо число из меньшего числа смехотворна сама по себе. Тем не менее именно это пытаются делать алгебраисты, толкующие о числах, меньших нуля; об умножении отрицательного числа на отрицательное; о мнимых числах... Все это не более чем жаргон, в котором нет ни капли здравого смысла» [22, с. 129].

Таким было отношение к отрицательным числам, и комплексные числа были только терпимы и не получили «права гражданства». Еще одно свидетельство: «...Даламбер, обсуждая вопрос в „Энциклопедии“ (статья „Отрицательное“), после целого столбца довольно путаных объяснений падает духом и ограничивается выводом, что „правила алгебраических действий с отрицательными количествами в общем приняты всеми и считаются точными, независимо от того, что подразумевается под этими количествами“» [7, с. 29]. Первой попыткой установить «формальные» законы действий в алгебре была статья С. Ключеля (1795). Поэтому не будем удивляться тому, что вначале Гамильтон нашел «обоснование» действий с отрицательными числами.

Отправным понятием для Гамильтона было время; моменты времени $A, B \dots$ он представлял отложенными на числовой оси. Ясно, что $B - A = +a$ — это промежуток времени от момента

A до момента B , причем момент A предшествует моменту B . Этот промежуток Гамильтон называл *шаг во времени*. Понятен и смысл величин $+2a, +3a, \dots$ а также величины $-2a$ — это *обращенный шаг*, знак «минус» означает *обращение времени*: если $+a$ — промежуток некоторой длительности от момента A до момента B , то $-2a$ — промежуток той же длительности, но момент B предшествует моменту A . Тогда $-3(-2a)$ — промежуток времени, обращенный еще раз, он должен «начинаться» в момент A и «быть направленным в будущее», а по длительности он в три раза больше, чем $2a$. Гамильтон считал, что только после таких рассуждений можно отделить числовые коэффициенты от шагов времени и допустить действия с ними, так как теперь доказано, что $(-3)(-2) = +6$ и действия с относительными числами обоснованы.

Далее, вполне можно мыслить о паре моментов (A, B) , о паре шагов во времени (a_1, a_2) как о едином объекте. Некоторые операции с парами шагов не нуждаются в пояснениях, но вот деление пар шагов производится «естественно» и «очевидно» в одном-единственном случае — при пропорциональности первых и вторых шагов, тогда

$$\frac{(ta_1, ta_2)}{(a_1, a_2)} = t.$$

Однако «...мы оказываемся не в состоянии определить такое отношение во всех других случаях... Дух настоящей теории пар приводит нас к мысли, что отношение... вероятно, может быть выражено в общем случае парой чисел» [59, с. 80].

Как и для простых шагов, Гамильтон определяет все операции над парами чисел через операции над парами шагов (причем не самым рациональным способом). В результате он заключает, что числовая пара может быть представлена *первой и второй единицами*:

$$(a_1; a_2) = (a_1; 0) + (0; a_2) = a_1(1; 0) + a_2(0; 1).$$

В числовой паре между элементами — точка с запятой; в паре временных шагов — запятая!!!

Действительное число можно считать частным случаем числовой пары $(a; 0)$, мнимое число — парой $(0; b)$.

Осталось разрешить следующую проблему: известно, что

$$(t; 0)(a_1, a_2) = (ta_1, ta_2).$$

Нужно установить закон умножения общей числовой пары $(t_1; t_2)$ на пару шагов (a_1, a_2) . Если такой закон будет найден, из него и можно «извлечь» закон умножения числовых пар:

$$(a; b)(c; d) = (\mu; \nu).$$

При «выводе» этих законов контрольной точкой было правило умножения комплексных чисел; кавычки здесь совершенно уместны, так как Гамильтон пытался убедить, что закон умножения числовых пар

$$(a; b)(c; d) = (ac - bd; ad + bc)$$

является следствием распределительного свойства умножения, а также «условий делимости» (числовых коэффициентов от «временных множителей»)... а не постулирован им самим.

Так в 1837 г. Гамильтон ввел «современное» определение комплексного числа как упорядоченной пары действительных чисел с аксиоматическим заданием операций для этих пар. Почти в то же время к аналогичному представлению пришел Янош Бойяи, который не опубликовал свои исследования.

Названия *гамильтонова пара*, *гамильтонова теория пар* употреблялись очень недолго. Источник идей быстро забыли, и теория комплексной переменной стала излагаться без указания на исторические корни. Однако в конце XIX в. происхождение теории еще помнили, например, книга казанского (тогда) математика В. П. Максимовича была озаглавлена «Новая теория гамильтоновых пар и соответственное обобщение теории функций мнимого переменного» (1884).

Следующим этапом в исследованиях Гамильтона была теория троек шагов во времени и троек чисел — *триплетов*.

На исследования Гамильтона в математике, конечно, наложили отпечаток его общие философские воззрения (близкие

к взглядам Беркли и Канта). Он считал, что «если геометрия опирается на интуицию пространства, то алгебра могла бы опираться на интуицию времени». Пытаясь осознать процесс сотворения науки, Гамильтон особо отмечал, что исходным моментом познания являются «видимости», наблюдаемые факты. Математическая обработка наблюдаемых явлений создает особый мир математических символов, который находится в определенном соответствии с внешним миром. Гамильтон полагал, что в каждой физической науке необходимо восходить от фактов к законам путем индукции и анализа и нисходить от законов к следствиям дедуктивным или синтетическим путем. Нужно собирать и группировать видимости до тех пор, пока научное воображение различит их скрытый закон и единство возникнет из разнообразия; и затем из единства вывести вновь разнообразие и заставить открытый закон обслуживать будущее. Гамильтон обсуждал проблемы строения материи с Фарадеем (1834), в письме к Ллойд-ду он напоминал разговор о четвертом измерении и о выводе: «Наука о механике уже является геометрией четырех измерений».

Методологические воззрения Гамильтона подвели его к грандиозной задаче — создать универсальное исчисление, охватывающее все математические и физические науки. Пытаясь построить исчисление триплетов, Гамильтон не мог и не хотел «оторваться» от троек шагов во времени: его теория связывала воедино время (тройки моментов, тройки шагов во времени) и пространство (тройки чисел, тройки координат точек). Он был воодушевлен идеей создания теории, объединяющей науки о пространстве и времени, т. е. геометрию и алгебру.

Вначале Гамильтон, по аналогии с развитой теорией пар, ввел *первую, вторую и третью единицы* $1_1, 1_2, 1_3$, или $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, и записал триплет в виде $r1_1 + s1_2 + t1_3$. Любопытно, что даже обозначения свидетельствуют, что ученые шли одним путем: Гаусс также обозначал единицы координатных осей o_1, o_2, o_3 . В 1835 г. Гамильтон пришел к другой «конструкции», которая с точностью до обозначений повторяет идеи Весселя! Год спустя к таким же соображениям пришли друзья Гамильтона — Джон и Чарлз Грейвс. Последний и ввел в употреб-

ление, кроме i , вторую мнимую единицу j (абсолютно аналогичные мнимым единицам и операторам ε и η Весселя). Ч. Грейвс представлял «линию в пространстве простым и элегантным экспоненциальным выражением $re^{il}e^{j\lambda}$ » (по словам Гамильтона). Приняв эти символы (и добавив к ним впоследствии следующую букву алфавита k), Гамильтон увековечил их — они сохранились в современном векторном исчислении в виде ортов i, j, k .

Задача умножения триплетов (троек):

$$(x_1 + iy_1 + jz_1)(x_2 + iy_2 + jz_2) = x_1x_2 - y_1y_2 - z_1z_2 + \\ + i(x_2y_1 + x_1y_2) + j(x_1z_2 + x_2z_1) + ij(y_1z_2 + y_2z_1)$$

задержала Гамильтона на добрый десяток лет.

«Здесь четвертый член $ij(y_1z_2 + y_2z_1)$ кажется просто лишним. На момент это навело меня на мысль, что, возможно, произведение ij нужно считать равным нулю. Но я увидел, что этот член (или часть) произведения получился при вычислении как сумма двух $ijy_1z_2 + jiz_1y_2$ и что эта сумма исчезала, если делалось менее жесткое предположение, как мне казалось, а именно при $bz = cy$ и $ij = -ji$ или же $ij = +k$, $ji = -k$, где значение произведения ij еще оставалось неопределенным» [59, с. 47]. Стоит отметить, что мы видим в этом случае первое появление некоммутативной операции в математике.

Много лет спустя Гамильтон писал сыну:

«...желание открыть законы умножения вновь возникло во мне с силой и страстностью, желание, дремавшее в течение многих лет... Каждое утро... твой (тогда) маленький братец Вильям Эдвин и ты имели обыкновение за завтраком спрашивать меня: „Ну, папа, можешь ли ты умножать триплеты?“ И я всегда был вынужден отвечать, печально качая головой: „Нет, я могу только складывать и вычитать их“.

Но 16-го октября 1843 г... когда я шел по набережной Королевского канала в сопровождении твоей матери, которую, вероятно, подвезли сюда, то несмотря на ее разговор со мною, мои мысли так четко работали в подсознании, что дали, наконец, результат, важность которого я тотчас же ощутил. Казалось, замкнулась электрическая цепь и вспыхнула искра, пришел

вестник (как я моментально почувствовал) плодов многих лет неуклонно направленной работы мысли во мне... Я не мог подавить импульса — не философского в сущности — вырезать на камне Бругамского моста, мимо которого мы проходили, основную формулу со знаками i, j, k , именно $ijk = -1$, которая содержит решение проблемы...» [34, с. 30].

Гамильтон в тот же день зафиксировал в протоколах Совета академии наук: «...дано разрешение прочесть статью о новом виде мнимых величин, связанных с теорией кватернионов». Последние двадцать два года жизни Гамильтон отдал развитию, совершенствованию и распространению теории кватернионов.

С 1844 г. начались серии публикаций в двух журналах, которые продолжались до 1849–1850 гг. и не были окончены (хотя в обеих сериях обещано продолжение). В 1848 г. Гамильтон прочитал лекции по теории кватернионов в Дублине. В честь этого открытия была отчеканена медаль.

«Очень скоро кватернионы стали в Дублине той областью математических интересов, которая сосредоточила на себе максимальное внимание; они были сделаны даже предметом, по которому был установлен специальный экзамен и без знания которого немислимо было окончание колледжа. Для самого Гамильтона они сделались краеугольным камнем его математического *credo*, и он насильственно связывал с кватернионами все свои геометрические и прочие работы; эта фанатическая вера в универсальное значение теории кватернионов росла по мере того, как вырастала к концу его жизни односторонность его интересов...» [23, с. 224].

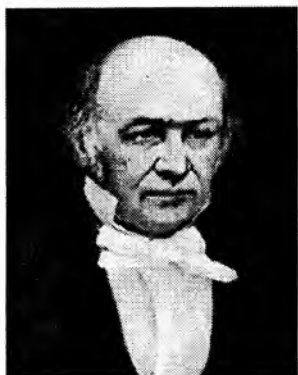
Глава 2

«Любопытная цепь математических размышлений открылась мне»

У. Р. Гамильтон

Уильям Роуэн Гамильтон родился в Дублине. Мать мальчика умерла, когда ему было 12 лет, а отец — через два года. С тех пор он жил у дяди. С детства Гамильтон отличался необычайными

способностями: уже в 8 лет он знал пять языков, а к 12 годам владел двенадцатью языками. Еще в школе (1815–1823) он обнаружил поразительные математические способности (в школьные годы он изучал высшую математику и небесную механику). С юношеских лет он увлекался поэзией, писал стихи и долгое время никак не мог решить, что же является его истинным признанием — поэзия или математика.



У. Р. Гамильтон

В 1824 г. Гамильтон поступил в колледж Святой Троицы — Тринити-кол-

ледж в Дублине. Он был выдающимся студентом. В 1827 г. Гамильтон представил Ирландской академии свою первую работу «Теория систем лучей» — глубокое исследование по теоретической оптике. Благодаря этому сочинению двадцатидвухлетний Гамильтон в день окончания колледжа был избран директором Обсерватории. Он поселился на территории Обсерватории и стал более или менее независимым в научной работе и в жизни.

Гамильтон был протестантом, в Ирландии это означало принадлежность к правящей партии. Религиозные бури, сотрясающие эту страну, не могли миновать Гамильтона. Хотя он, как и большинство его друзей, высказывался за эмансипацию католиков, но надолго потерял душевный покой, когда два его друга перешли в католицизм, а две сестры — в кальвинизм.

Этот истинно верующий ученый не мог не применить математику к «решению» религиозных проблем, которые казались ему важными. В 1844 г. он опубликовал статью, в которой изложил расчеты времени вознесения Христа на небо. Поскольку Христос вознесся не только духом, но и телом (что оговорено в Евангелии), то вознесение должно было происходить во времени, так как никакой материальный предмет не может преодолеть пространство мгновенно.

Гамильтон по-настоящему любил только одну женщину — Кэтрин Дисни. Однако родные Кэтрин не дали согласия на брак, и Гамильтон женился на некоей Элен Бейли. Союз двух очень благочестивых христиан не был счастливым. Жена (возможно, из-за болезни) большую часть времени прожила вне семьи, переложив на мужа заботы о воспитании троих детей.

В 1848 г. Кэтрин и Гамильтон вступили в переписку: они любили друг друга по-прежнему. Несчастливая женщина не выдержала — она призналась мужу и приняла яд. Кэтрин спасли, но жить ей оставалось недолго. В 1853 г. она умерла. Вспоминая эти пять лет жизни (1848–1853), Гамильтон удивлялся, как у него хватило сил создать «Лекции о кватернионах». Быть может, сумбур этой книги отчасти определялся хаосом его жизни в эти годы?

Две первые работы Гамильтона по механике принесли ему мировую славу (1834, 1835). Именно тогда Якоби (приехавший

в Англию) сказал: «Гамильтон — это Лагранж вашей страны». В 1835 г. Гамильтон был возведен в дворянство и стал сэром Уильямом (так же как Ньютон в свое время, — тогда это был первый случай возведения в дворянство за научные заслуги). На основе «Теории систем лучей» Гамильтон в 1832 г. предсказал явление внутренней и внешней конической рефракции, которое вскоре было найдено экспериментально Х. Ллойдом. Это открытие было удостоено золотой медали Лондонского королевского общества. В 1838 г. Гамильтон был единогласно избран членом-корреспондентом Российской академии наук (представление подписано М. В. Остроградским, В. Я. Буняковским и Н. И. Фуссом). Незадолго до смерти Гамильтон получил известие, что созданная во время гражданской войны академия наук США избрала его своим иностранным членом; имя Гамильтона было первым в списке 115 кандидатов. Избрание доставило ему большую радость.

По «математическому темпераменту» Гамильтон был типичный самоучка. Если ему указывали на некоторые аналогии между его открытиями и результатами других ученых, он ограничивался констатацией факта в примечаниях и не делал никаких попыток углубить свои исследования, развивая идеи других ученых. В последние годы жизни, когда его интересовала только теория кватернионов, он с удовлетворением отмечал, что ее методами можно доказать известные теоремы, подтвердить установленные ранее результаты.

Хэнкинс, посвятивший 20 лет своей жизни изучению творчества Гамильтона, полагает, что Гамильтон провел большую часть жизни с пером в руке; вероятно, к такому выводу можно придти, ознакомившись с 60 томами архива Гамильтона. Он непрерывно писал: сочинял поэмы по любому поводу и на любую тему, излагал только что пришедшие на ум научные соображения, составлял письма своим многочисленным корреспондентам, среди которых — поэты, писатели, философы, геологи... и только один первоклассный математик — Август де Морган. Письма Гамильтона иногда содержали до 50–100 густо исписанных страниц. Ясно, что быстро отвечать он не мог. Однажды

после долгого ожидания ответа де Морган написал ему: «Если Вы умерли и похоронены, почему Вы не скажете об этом как мужчина, вместо того, чтобы заставлять меня догадываться об этом по Вашему молчанию?»

Гамильтон много работал (по 12 и более часов в сутки), почти всегда стоя и частенько поддерживая себя ви́ски, что привело его на грань алкоголизма; Тэт уничтожил последние письма Гамильтона, чтобы не компрометировать память о нем. Общее мнение дублинских ученых — он убил себя работой.

* * *

Но вернемся к открытию закона умножения триплетов. При их перемножении должны выполняться «некоторые геометрические аналогии», если говорить словами самого Гамильтона. Таких аналогий он держал в уме сразу несколько: правило Уоррена для точек плоскости (то есть геометрическая картина преобразования вектора на плоскости), нахождение четвертой пропорциональной к двум сомножителям и единице, отложенной на одной из осей, «закон модулей»:

$$\begin{aligned} \text{если} \quad & (a + ib + jc)(a + ib' + jc') = a'' + ib'' + c'', \\ \text{то} \quad & (a^2 + b^2 + c^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2) = a''^2 + b''^2 + c''^2. \end{aligned}$$

наконец, формулу Эйлера $e^{i\rho} = \cos \rho + i \sin \rho$, из которой следовал и «закон модулей» (известный Эйлеру $z = |z_1| \cdot |z_2| \cdot e^{i(\rho_1 + \rho_2)}$).

Когда Гамильтон пришел к следующему произведению триплетов:

$$(a + ib + jc)(x + iy + jz) = ax - by - cz + i(ay + bx) + j(az + cx) + ij(bz + cy),$$

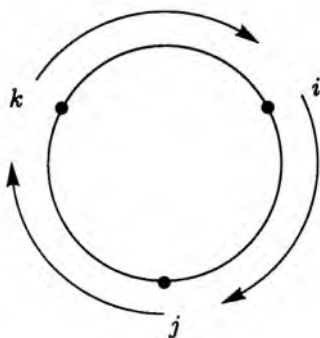
он попытался проверить, выполняется ли «закон модулей» (опустив на всякий случай последнее слагаемое). Оказалось, что нет; и более того, правая часть отличается от левой на $(bz + cy)^2$.

«И здесь вдруг меня осенило, — пишет Гамильтон Дж. Грейвсу, — ...что для вычислений с триплетами необходимо допустить в некотором смысле четвертое измерение пространства, или, перенеся парадокс в алгебру, допустить третий мнимый символ k ,

отличный от i и j , не складывающийся с i и j , но равный произведению... это и привело меня к введению кватернионов, таких как $a + ib + jc + kd$ или (a, b, c, d) » [59, с. 107].

Итак, Гамильтон пришел к мысли, что триплеты надо рассматривать как вырожденную форму четверок чисел, кватернионов, таких как $u + ix + jy + kz$, где символ k означает некоторый новый вид единичного оператора... Таким образом, все фундаментальные предположения для умножения двух кватернионов были завершены и заключались в формулах

$$\begin{aligned} i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = -ji = k, \\ jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j. \end{aligned} \quad (2.1)$$



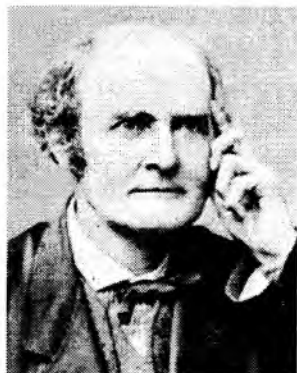
Мнемоническое правило, придуманное Гамильтоном для «таблицы умножения» (2.1)

К восторгу Гамильтона «время и пространство» теперь входили в кватернион как слагаемые, т. е. были связаны гораздо теснее и проще, чем тройки шагов во времени с коэффициентами — числовыми тройками. Поэтому вначале он хотел дать своим «четверкам» название *grammarithm* от γραμ — «линия» и αριθμος — «число». Но, поколебавшись, остановился на *кватернионах*.

Введение некоммутативности было также совершенным новаторством: «...хотя теория определителей была

создана к 1820 г. ...прогресса в выяснении понятия матрицы не наблюдалось. ...Бесполезно искать у Гаусса, Коши или Бине следы какой-нибудь общей формулировки о некоммутативности произведения двух матриц. Несомненно, что этот факт затмнен тем, что произведение двух определителей как произведение двух скалярных величин коммутативно» [14, с. 396]. В связи с этим отметим, что исследования Кэли по теории матриц были начаты после знакомства с теорией кватернионов, вслед за его статьями, где выведено характеристическое уравнение линейного преобразования...

Подобный ход мыслей был совершенно неожиданным для его друзей. «Кватернионы подействовали как шок на тех, с кем он переписывался. Реакция Джона Грейвса и Августа де Моргана... передает их изумление. Грейвс определенно не считал, что Гамильтону позволено творить мнимые; он не мог выдвинуть никаких логических возражений против того, что сделал Гамильтон. И все-таки это его удручало» [60, с. 300].



А. Кэли

Несмотря на такую первую реакцию, де Морган, Дж. Грейвс и Кэли быстро оценили важность нового подхода: Дж. Грейвс в течение двух месяцев нашел гиперкомплексные числа, составленные из восьми элементов, которые он назвал *октавами*. Сообщение об октавах он направил для публикации в журнале Ирландской академии наук (президентом академии был тогда Гамильтон). Занятый своими исследованиями, Гамильтон своевременно не прочел и не опубликовал сообщение Грейвса (до лета 1844 г.), а за это время октавы вновь открыл Кэли, с именем которого они и связаны в математике.

Публикации Гамильтона представляют поучительную картину формирования понятий, развития методов, поисков поля приложения теории, выработки ее языка и стиля.

В первой же статье (1844) он вводит новую терминологию, знакомую нам по векторному исчислению, и свои обозначения: «Алгебраически действительную часть... можно получить как значения, содержащиеся на одной шкале (scale) последовательности чисел от $-\infty$ до $+\infty$; поэтому мы будем называть ее скалярной частью и образуем для нее перед символом кватерниона символ-приставку Scal., или просто S.. С другой стороны алгебраически мнимая часть (будучи геометрически представлена прямой линией или радиус-вектором, которые для каждого определенного кватерниона имеют, вообще говоря, определенную длину и определенное направление в пространстве) может

быть названа *векторной частью* или просто вектором кватерниона и может быть обозначена приставкой, характеристикой *Vect.*, или *V.* Следовательно, мы можем сказать, что кватернион есть, вообще говоря, сумма скалярной и векторной частей, и написать $Q = \text{Scal.}Q + \text{Vect.}Q = S.Q + V.Q$ [59, с. 237].

В начале исследований Гамильтон на равных использовал выражения *действительная и мнимая части* или *скалярная и векторная части*, но постепенно все более употребительным становился последний оборот.

Итак обозначения $S.Q$ и $V.Q$ исторически предшествовали общепринятым $\text{Re } z$, $\text{Im } z$. Вейерштрасс ввел обозначение $\Re z$, возможно, не без влияния теории кватернионов; для мнимой части он использовал $\Re[if(z)]$.

Гамильтон ввел термин *vector* (от латинского *vehere* — «нести»), чтобы обозначить «шаг от точки A к точке B ... потому, что его можно рассматривать как работу (work, task), задание по транспортировке или переносу подвижной точки из начального положения в... конечное» [58, с. 15]. В «Элементах кватернионов» (1866) встречается и такое определение: «...вектор или направленная прямая в трехмерном пространстве...» [57, с. 279].

Другое представление кватерниона, аналогичное показательной форме комплексного числа, тесно связано с задачей вращения вектора в пространстве, подсказавшей необходимость перехода от триплетов к кватернионам. Оказалось, что поворот вектора ρ вокруг некоторого единичного вектора α на угол 2θ осуществляется следующими операциями:

$$(\cos \theta + \alpha \sin \theta)\rho(\cos \theta - \alpha \sin \theta) = q\rho q^{-1}.$$

Поэтому кватернион $(\cos \theta + \alpha \sin \theta)$ назван *верзором*. С помощью одного множителя такое преобразование можно описать только тогда, когда поворот происходит в плоскости, перпендикулярной оси вращения, например,

$$ij = (\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ)j = k,$$

в этом случае оператор (i) называют *квадрантальным верзором*.

Для длины вектора Гамильтон использовал название *тензор*, «чтобы связать это понятие с действием растяжения», и обозначение Tq ;

$$Tq = \sqrt{u^2 + x^2 + y^2 + z^2}.$$

Итак,

$$q = Tq \cdot Uq,$$

где U — первая буква слова *Unit* — «единица», «единичный».

Наконец, аналогом тригонометрической формы комплексного числа является представление кватерниона в виде

$$q = Tq(\cos \phi + \alpha \sin \phi).$$

Гамильтон обозначил векторные величины греческими буквами, а скалярные — латинскими, чтобы с одного взгляда различать их; исключение составляли единичные векторы i, j, k и число π .

При перемножении двух векторов, выполненном по правилам (2.1), получается следующий результат:

$$\begin{aligned} \sigma\sigma' = & -x_1x_2 - y_1y_2 - z_1z_2 + \\ & + i(y_1z_2 - y_2z_1) + j(z_1x_2 - z_2x_1) + k(x_1y_2 - y_1x_2). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Мы видим, что векторное произведение осталось неизменным с того времени, как его ввел Гамильтон, а скалярная часть произведения $S.\sigma\sigma'$ отличается от современного скалярного произведения знаком именно из-за своего «кватернионного происхождения»:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1.$$

Соотношение $V.\alpha\beta = -V.\beta\alpha$, принятое лишь для «единиц i, j, k », следует из простейших тождеств почти автоматически (что и свойственно методам теории кватернионов):

$$V.\alpha\alpha = 0$$

(для любого вектора, в том числе и для $\alpha + \beta$)

$$V.(\alpha + \beta)(\alpha + \beta) = 0,$$

т. е.

$$V.(\alpha\alpha + \alpha\beta + \beta\alpha + \beta\beta) = 0,$$

откуда

$$V.\alpha\alpha + V.\alpha\beta + V.\beta\alpha + V.\beta\beta = 0$$

и следовательно

$$V.\alpha\beta + V.\beta\alpha = 0.$$

Мы познакомились с одним тождеством теории кватернионов, еще одно его применение: $V.\alpha\beta = 0$, можно считать условием коллинеарности векторов, следовательно $V.\alpha\rho = 0$ — уравнение прямой, параллельной вектору α и проходящей через начало координат.

Кватернионы $q = u + ix + jy + kz$ и $Kq = u - ix - jy - kz$ названы *сопряженными* (Konjugate). Несколько простейших тождеств аналогичны соответствующим формулам для обыкновенных комплексных чисел:

$$q + Kq = 2S.q; \quad q - Kq = 2V.q;$$

$$q \cdot Kq = u^2 + x^2 + y^2 + z^2 = (Tq)^2 = (Tkq)^2 = N.q$$

(N. — Norma), а также очевидные $S.\alpha = 0$, $S.a = \alpha$, $V.a = 0$, $V.\alpha = \alpha$ и т. п.

На этом аналогия обрывается: в 1843 г. не было развитой ТФКП, следовательно, не было образца для построения нового исчисления. Созданная Гамильтоном теория не была похожа ни на теорию комплексных чисел, ни на современное векторное исчисление, ни на ту теорию, какой стала теория кватернионов в руках следующих поколений математиков. В качестве только одного примера приведем результат Гурвица («Арифметика кватернионов», 1896): кватернион раскладывается на простые множители не единственным способом:

$$-1 + 3i + 1j + 2k = (1 + 2i)(1 + i + j) = -(1 - i + j)(1 - 2k).$$

Набор кватернионных тождеств рос со скоростью лавины. Их использование и создавало те специфические методы, о которых Ф. Клейн писал: «Легкость и изящество, с которыми получают на этом пути глубоко содержательные теоремы, действительно изумительны; этим и объясняется восхищение кватернионистов своей системой, которая вскоре была ими расширена за разумные границы в ущерб не только для математики в целом,

но и для самой теории кватернионов. Такому развитию способствовал и высоко развитый формальный аппарат системы, богато питаемый символикой обозначений, внушающий глубокое уважение, доходившее до благоговения. Возникло много больших надежд на дальнейшее систематическое развитие теории кватернионов, наподобие теории обыкновенных чисел... Крайней целью было создание... теории функций для кватернионов, от которой ожидали совершенно новых, необычайно широких результатов для всей математики» [23, с. 227–229].

Ганкель невысоко ценил методы теории кватернионов: «Эти методы, однако, очень сложны, мало наглядны и чисто теоретически мало интересны...» [10, с. 193].

И все же методы поразительно эффективны. Как облегчаются доказательства в духе теории кватернионов можно представить себе по знакомому нам оператору набла. То, что поле $F = \text{grad } U$ — потенциально, конечно, можно доказать и не прибегая к ∇ , но насколько компактнее и изящнее доказательство: «векторное произведение коллинеарных векторов ∇ и ∇U равно нулю $V \cdot \nabla(\nabla U) = 0$ ». Приведем еще один пример — самого распространенного приема рассуждений: произведение векторов состоит, вообще говоря, из скалярной и векторной частей:

$$\alpha\beta = S.\alpha\beta + V.\alpha\beta.$$

Если умножить это произведение на третий вектор γ , получим

$$\alpha\beta\gamma = (S.\alpha\beta)\gamma + (V.\alpha\beta)\gamma,$$

где $(S.\alpha\beta)\gamma$ — вектор, а произведение векторов $(V.\alpha\beta)\gamma$ снова содержит векторное и скалярное слагаемые. Таким образом,

$$S.\alpha\beta\gamma = S.(V.\alpha\beta)\gamma. \quad (2.3)$$

Так получено первое определение векторно-скалярного определения и первая формулировка условия компланарности трех векторов $S.\alpha\beta\gamma = 0$ и цепочка чрезвычайно употребительных тождеств:

$$S.\alpha\beta\chi = S.(V.\alpha\beta)\gamma = S.\gamma\alpha\beta = S.(V.\gamma\alpha)\beta = \dots$$

Геометрический смысл скалярного и векторного произведений векторов (вернее, скалярной и векторной частей произведения) Гамильтон констатировал без каких-либо доказательств и пояснений, вероятно, потому, что соответствующие формулы, выраженные через декартовы координаты, были хорошо известны к тому времени в аналитической геометрии, кроме, быть может, объема параллелепипеда: в работе, представленной на премию в 1815 г. и опубликованной в более спокойные времена (в 1827 г.) Коши выразил объем параллелепипеда в виде

$$A_1 B_2 C_3 - A_1 B_3 C_2 + A_2 B_3 C_1 - A_2 B_1 C_3 + A_3 B_1 C_2 - A_3 B_2 C_1,$$

где A, B, C — проекции соответствующих ребер на оси x, y, z .

Выражение для объема тетраэдра было открыто еще раз в 1857 г. итальянским математиком Франческо Фаа ди Бруно — учеником Коши! На этот раз результат был записан через определитель. Поэтому условия перпендикулярности и коллинеарности двух векторов $S \cdot \alpha\beta = 0$ и $V \cdot \alpha\beta = 0$, а также условие компланарности трех векторов $S \cdot \alpha\beta\gamma = 0$ сразу же стали расхожим инструментом теории кватернионов.

Термин *coplanar* Гамильтон ввел в первых же публикациях. Некомпланарные векторы, как не лежащие в одной плоскости, иногда назывались «дипланарными», а иногда и не удаивались названия, например, просто указывалось «пусть α, β, γ — произвольные векторы, $S \cdot \alpha\beta\gamma \neq 0$ ». Термин *коллинеарность* более поздний. В течение десяти лет Гамильтон писал: «Векторы направлены точно одинаково или точно противоположно друг другу» или «векторы α и β соаксиальны», прежде чем ввел термин *коллинеарны*.

Определяя произведение кватернионов (векторов), Гамильтон отметил важность понятия ориентации трех направлений. Впервые левую—правую системы координат стали различать Мёбиус (1827) и Гаусс (1846). Однако в постоянный обиход различение систем вошло только с развитием векторного исчисления. Гамильтон употреблял термины «левый, правый характер вращения» в смысле, противоположном принятому ныне. Эти названия Максвелл перенес на системы координат (1873); пер-

воначально он хотел использовать выражения «характер вращения, как у винограда, характер вращения как у хмеля». До того как современные термины стали общепринятыми, применялись названия «положительно и отрицательно ориентированные системы» или «французская и английская системы» и многие другие.

Поскольку кватернионы возникли как обобщение комплексных чисел, то вопрос о том, что такое единицы i, j, k и как они связаны между собой, имел первостепенную важность. Поэтому в первых фразах первого сообщения Гамильтон вводит понятие *линейной независимости* элементов (впервые в математике нового времени): «Предполагается, что между i, j, k не существует никакого линейного соотношения, так что уравнение

$$Q = Q'$$

(где $Q = w + xi + yj + zk$, $Q' = w' + x'i + y'j + z'k$ и $w, x, y, z, w', x', y', z'$ — действительные) эквивалентно четырем отдельным уравнениям $w = w', x = x', y = y', z = z'$. Постепенно теория кватернионов развивалась, преобразовалась и становилась все более наглядной; алгебраический подход был вытеснен геометрическим, и замечания о линейной независимости (или зависимости) векторов стали просто излишними; стандартным приемом доказательств было такое рассуждение: если три вектора компланарны, то один из них можно представить в виде суммы двух других: $\rho = x\alpha + y\beta$.

Интересно, что точно такая же картина наблюдалась и в сочинениях Грассмана: там, где он развивает строгое аксиоматическое построение теории, понятие линейной независимости системы единиц $e_1, e_2, \dots, e_n$ естественно и существенно используется, а в статьях, где излагаются приложения и рассматриваются только «отрезки» в трехмерном пространстве, понятие как будто становится «излишней строгостью».

Характерная черта теории кватернионов — использование вспомогательных векторов и всевозможных операторов: если некоторое утверждение справедливо для некоторого вектора ρ , то, заменив ρ другим вектором, например $\Phi\rho$, или $\Phi^{-1}\rho$, или $V.\mu\nu$,

можно получить многообразные результаты, следствия. Так совершенно автоматически получается новая теорема — не всегда тривиальная! Такой же автоматизм достигается применением многочисленных операторов. Для того чтобы сегодня читать кватернионное исследование, вообще говоря, достаточно знать, что

$$S.\alpha\beta = -\alpha \cdot \beta, \quad \text{а} \quad V.\alpha\beta = \alpha \times \beta,$$

однако перестроить мышление и думать так, как думали кватернионисты — довольно непросто. В этом нас убеждает почти каждый из приведенных примеров, хотя специально подобраны самые наглядные, негромоздкие, «в одно действие».

После того как Гамильтон ввел (1846) «символический вектор

$$\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z},$$

арсенал кватернионных тождеств существенно пополнился. Приведем для примера оператор

$$S.\alpha\nabla = -\alpha_x \frac{\partial}{\partial x} - \alpha_y \frac{\partial}{\partial y} - \alpha_z \frac{\partial}{\partial z}$$

и формулу Стокса

$$\iint S.U\nu \cdot V.\nabla\sigma \, ds = \int S.\sigma \, d\rho.$$

Здесь $V.\nabla\sigma = \text{rot } \sigma$, а проекция этого вектора на единичный вектор нормали ($U\nu$) и есть подынтегральная функция в поверхностном интеграле. Из тождества $S.\alpha\beta\gamma = S.(V.\alpha\beta)\gamma$ следует

$$S.U\nu V.\nabla\sigma = S.U\nu \nabla\sigma$$

(направление обхода контура и сторону поверхности интегрирования в те годы не указывали).

Несмотря на то, что Гамильтон предвидел чрезвычайную важность оператора ∇ , в «Лекциях о кватернионах» он уделил оператору только две страницы, которые выглядят как «заявка» золотоискателя: «Поверхностного обзора этих формул достаточно, чтобы убедить любого, кто хотя бы поверхностно знаком

(я не претендую на хорошую осведомленность) с современными исследованиями в АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ по тяготению, теплу, электричеству, магнетизму и т. п., что уравнения этого раздела (как я намекнул выше) еще будут полезны в изучении природы, когда исчисление кватернионов привлечет больше внимания, чем до сих пор, и им как инструментом исследования овладеют руки, более искусные, чем мои. Тем не менее я могу заметить, что:

- если v обозначает температуру точки с координатами x, y, z в твердом теле, то символ ∇v может обозначать поток тепла в этой точке;
- если v — потенциал системы притягивающихся тел... то ∇v есть вектор, который представляет величину и направление силы ускорения в точке;
- если v — скалярная функция... то символ ∇v обозначает нормальный вектор поверхности, уравнение которой $v = \text{const}$ [58, с. 610].

Гамильтон отметил, что можно применить оператор ∇ к любому скаляру, вектору или кватерниону, рассматриваемым как функции x, y, z . Однако из всех возможных операций сам он в «Лекциях о кватернионах» использовал только одну — умножение вектора ∇ на скалярную функцию — буквально только то, что приведено выше. Другие возможности впоследствии изучил Тэт.

Гибкости аппарата теории кватернионов существенно способствовала многозначность понятия *вектор*. Символ i означал, во-первых, перенос, единичный вектор оси Ox ; во-вторых, мнимую единицу, $i^2 = -1$; и, в-третьих, оператор вращения, верзор, $i \times j = k$. К доказательству того, что во всех случаях $i^2 = -1$, $j^2 = \dots$ и что справедливы ассоциативный и дистрибутивный законы, Гамильтон возвращался вновь и вновь. Очевидно, что эти доказательства не удовлетворяли его. По-видимому, они не удовлетворяли и его учеников: некоторые из этих рассуждений никогда не цитировались и не упоминались ими. Приведем доказательство из курса Келлэнда и Тэта «Introduction to Quaternions» («Введение в теорию кватернионов», 1882):

«Перейдем к получению одного из результатов применения ассоциативного закона. Так как $ij = k$, то <после умножения слева обеих частей на i > мы имеем $i \cdot ij = ik = -j$. Затем (вследствие ассоциативности умножения) $i \cdot ij = (ii)j = i^2 j$. Таким образом, $i^2 j = -j$ или $i^2 = -1$.

На наш взгляд, вывод состоит в том, что квадрат единичного вектора вдоль оси x есть -1 , и поскольку ось Ox может иметь любое направление, то получаем, что квадрат единичного вектора равен -1 . Другими словами, повторение поворота на прямой угол изменяет направление вектора на противоположное». В этом рассуждении символ i сыграл последовательно все три свои роли: сначала мнимой единицы, затем единичного вектора и, наконец, оператора-верзора.

Когда нужно было различать ипостаси вектора, Гамильтон отмечал это обозначениями: i, j, k или I, J, K . Но вообще говоря, кватернионисты вскоре перестали обращать внимание на такие детали и даже считали это обстоятельство особым преимуществом. Физики, наоборот, критиковали то положение, что «в теории кватернионов понятия бегают по кругу» (как выразился Максвелл).

Заканчивая общую характеристику исчисления Гамильтона, приведем его уникальные рассуждения о произведении векторов — «уникальные» в том смысле, что их никогда не повторяли (даже самые преданные последователи), и в том смысле, что они являют собой еще «зыбкую» материю новой теории — то ли доказательства, то ли «поиски на ощупь».

Гамильтон оговаривает два положения:

- «1) в кватернионе $q = u + ix + jy + kz$ скалярная часть не меняется при изменении системы координат (x, y, z) ;
- 2) произведение двух векторов $\alpha\beta$ (или нечто аналогичное!) меняет знак, если „обращен“ один из сомножителей, или удваивается (утраивается), если удваивается (утраивается) какой-либо из сомножителей. Тогда „квадрат данной линии не должен быть какой-нибудь линией, проходящей под углом к данной линии, так как даже если мы выберем какой-нибудь фиксированный угол наклона, нужны будут еще дан-

ные, чтобы определить плоскость, и таким образом *квадрат будет неопределенным...*

Квадрат данной линии (α^2) не может быть линией того же направления, он не может быть и линией *противоположного* направления. Так как если бы одно из этих направлений было бы выбрано *по определению*, то это определение обязывало бы нас считать, что квадрат обращается по направлению, когда обращается линия (квадратом которой он является)... Следовательно, мы должны рассматривать КВАДРАТ ЛИНИИ как *не имеющий направления в пространстве*. Но ничто не мешает нам рассматривать *квадрат* как ЧИСЛО, которое имеет раз навсегда определенный знак (еще неизвестный)“» [59, с. 146].

Таков же характер рассуждений о том, что представляет собой векторное произведение двух единичных перпендикулярных векторов.

Изучение функций кватернионов Гамильтон начинает с рассмотрения частных случаев:

- 1) аргумент — скалярная величина, функция — векторная;
- 2) и аргумент, и функция — векторы;
- 3) аргумент — вектор, функция — скаляр;
- 4) и аргумент, и функция — скалярные величины.

Таким образом (по мнению Гамильтона), частным случаем теории кватернионов оказывается вся математика, построенная до теории кватернионов, — алгебра и математический анализ.

1. Теория векторной функции скалярного аргумента, развита Гамильтоном в 1846 г. Он ввел понятие *годографа* и применил теорию к задачам небесной механики; легко и красиво были получены результаты, которые отчасти уже были известны Ламберту и Мёбиусу (как выяснилось позднее).

Слово *hodograph* составлено из греческих *одос* — «дорога» и *γραφω* — «пишу», «черчу», так что буквальный смысл термина — «дорога, описанная чем-либо». Кривая, которую описывает конец вектора скорости, если начала векторов перенесены в одну точку, названа Гамильтоном *годографом*. Путь движущейся точки он называл *орбитой*. Наиболее красивая теорема, доказанная

Гамильтоном: в случае движения по орбите под действием центральной силы, подчиненной закону Ньютона, годограф всегда является окружностью.

Вероятно, переход к современному словоупотреблению совершился в начале XX в., когда физики постигали векторное исчисление уже не по кватернионным трактатам, а авторы пособий, желая отойти от теории кватернионов и все же подчиняясь некоторым привычкам и традициям, стали писать «годограф скорости». Отсюда уже только один шаг до «годографа векторной функции». В «Лекциях о кватернионах» раздел о векторной функции скалярного аргумента изложен очень сжато, без каких-либо доказательств или пояснений.

Эта часть теории приобрела «современный» вид после того, как Тэт изложил ее в «Элементарном трактате о кватернионах» (1867), сопроводив некоторыми объяснениями и чертежами.

Введя векторную функцию двух скалярных аргументов

$$\rho = f(u, v),$$

Гамильтон развил и теорию поверхностей (надо признать еще более непонятную, чем предыдущая).

Еще об одной векторной функции скалярных аргументов

$$\nabla u = i \frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial u}{\partial y} + k \frac{\partial u}{\partial z}$$

мы уже упоминали. Долгое время

$$\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}$$

называли *символ Гамильтона* или *символический вектор Гамильтона*. Можно сравнить три варианта изложения ∇ -теории (1846, 1853 и 1866 гг.). Они незначительно отличаются друг от друга.

При первом введении «символа-дифференциатора ∇ » (1846) Гамильтон объяснял, как оперировать с этим символом. Его «доказательства» выглядели как набор мнемонических правил, хотя вначале и он сам не очень уверенно манипулировал с ∇ — так, он

LECTURES ON QUATERNIONS:

CONTAINING A SYSTEMATIC STATEMENT

A New Mathematical Method;

OF WHICH THE PRINCIPLES WERE COMMUNICATED IN 1843 TO

THE ROYAL IRISH ACADEMY;

AND WHICH HAS SINCE FORMED THE SUBJECT OF SUCCESSIVE COURSES OF
LECTURES, DELIVERED IN 1844 AND SUBSEQUENT YEARS

IN
THE HALLS OF TRINITY COLLEGE, DUBLIN:

WITH NUMEROUS ILLUSTRATIVE DIAGRAMS, AND WITH SOME GEOMETRICAL AND
PHYSICAL APPLICATIONS.

BY

SIR WILLIAM ROWAN HAMILTON, LL. D., M. R. I. A.,

FELLOW OF THE AMERICAN SOCIETY OF ARTS AND SCIENCES;
OF THE SOCIETY OF ARTS AND SCIENCES OF THE ROYAL ANTHROPOLOGICAL SOCIETY OF LONDON; AND OF THE
ROYAL HORTHURST SOCIETY OF ANTIQUARIES AT COPENHAGEN;
CORRESPONDING MEMBER OF THE SOCIETY OF SCIENCES OF THE ROYAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE
IMPERIAL ROYAL ACADEMY OF SCIENCES OF VIENNA, BERLIN, AND TORIN;
OF THE ROYAL SOCIETY OF EDINBURGH AND Göttingen; OF THE CAMBRIDGE PHILOSOPHICAL SOCIETY;
THE NEW YORK HISTORICAL SOCIETY; THE SOCIETY OF NATURAL SCIENCES AT LAUSANNE; AND OF OTHER
SCIENTIFIC SOCIETIES IN BRITAIN AND FOREIGN COUNTRIES;
ANDREW'S PROFESSOR OF ASTRONOMY IN THE UNIVERSITY OF DUBLIN
AND ROYAL ASTRONOMER OF IRELAND.



DUBLIN:

HODGES AND SMITH, GRAFTON-STREET,

BOOKSELLERS TO THE UNIVERSITY.

LONDON: WHITTAKER & CO., AVE-MARIA LANE.

CAMBRIDGE: MACMILLAN & CO.

1853.

утверждал, что соотношение $\nabla^2 u = -\Delta u$ справедливо для любой функции, векторной или кватернионной. Легко видеть, что это неверно.

За семь лет, прошедших между первой публикацией и выходом в свет книги «Лекции о кватернионах», Гамильтон не расширил по объему, не изменил по стилю изложение этого материала. Гамильтон как бы «застолбил» открытие на трех страницах (из 720). В обеих публикациях (1846, 1853) Гамильтон доказывает, что « ∇ не зависит от любой частной системы координат». Доказательство состоит в том, чтобы, переходя от одного равенства к другому, «исключить систему координат» и получить скалярную величину, которая есть инвариант относительно выбора той или иной системы.

2. Переходя к изучению функций кватернионного аргумента, Гамильтон ввел следующее определение: «Предположим, что кватернионная функция $f q$ состоит из некоторого конечного числа членов, в каждый из которых... кватернион входит как множитель некоторое количество раз; пусть наибольшее число этих раз будет n . Тогда уравнение $f q = r$ может быть названо кватернионным уравнением степени n . Уравнение

$$a_2 q a_1 q a + a'_2 q a'_1 q a' + a''_2 q a''_1 q a'' + \dots + b_1 q b + \dots + b'_1 q b' + \dots = c$$

будет представлять кватернионное уравнение второй степени» [58, с. 558]. Общий вид линейного уравнения:

$$b q a + b' q a' + b'' q a'' + \dots = c,$$

где известны все величины, кроме q . Приравнивая скалярные и векторные слагаемые, Гамильтон получает линейное алгебраическое уравнение (которым он, конечно, не занимается) и «линейное векторное уравнение». Значение последнего, таким образом, возрастает, поскольку к нему сводится и кватернионное уравнение. Эти рассуждения Гамильтона повторялись затем во всех руководствах по теории кватернионов (вплоть до учебников по векторному анализу XX в.).

Итак, особое внимание Гамильтон уделяет линейной векторной функции, но даже и это не помогает пониманию. Седьмая

глава, в которой изложен этот материал, трактует о множестве предметов — от самых элементарных до дифференциального исчисления кватернионов, разложения в ряды и т. п. Уже тот факт, что на 380 страницах изложено шесть лекций, а на 356 — одна (седьмая) лекция, характеризует неудачную структуру книги и свидетельствует о том, что линейная векторная функция «затерялась» среди обилия материала. Но этого мало. Совершенно справедлив отзыв Г. Ганкеля: «Самую теорию вместе с некоторыми применениями ее он изложил в обширных „Lectures on Quaternions“ в форме, очень неудобной для математиков на материке, но, по-видимому, очень естественной для англичан. Дело в том, что эта теория изложена в разбросанных отрывках, проблемы рассматриваются не во всей общности, но сначала лишь в некоторых специальных случаях, далее излагается все это несвязно, благодаря разным применениям и другим исследованиям для того, чтобы только лишь впоследствии закончить задачу во всем ее объеме, да и то иногда лишь случайно. Тут присоединяется еще необычное обширное, непрерывно повторяющееся изложение...» [10, с. 242]. Добавим только, что эта характеристика, тем не менее, заканчивается словами: «...теория кватернионов... продукт блестящих открытий знаменитого и гениального математика».

Еще один отзыв современника Гамильтона и Тэта интересен тем, что он принадлежит киевскому профессору математики Павлу Эмильевичу Ромеру: «Это сочинение — пока единственный капитальный труд о кватернёнах, теория которых представляет одно из оригинальнейших произведений английской математической школы и принадлежит ей вполне... Кватернены могут быть тесно связаны с декартовой системой координат, всего удобнее заменяют ее и поэтому необходимо захватывают все ветви математического анализа, насколько в них входит геометрия...

В настоящее время Тэт уже более трех лет готовится к печати трактат о кватернёнах, в который, вероятно, войдут и некоторые еще не опубликованные исследования Гамильтона, но сочинение его до сих пор не появилось. Оно должно быть

первым руководством по этому предмету, потому что „Lectures on Quaternions“ так назвать нельзя и по приему, каким оно написано, и по совершенному недостатку системы; это, скорее, огромный мемуар, нередко затруднительный для чтения и требующий от изучающего порядочного запаса предварительных сведений. Но написать именно руководство Гамильтон не имел и намерения» [37, с. 3]. Все — истинная правда, за исключением, может быть, последней фразы.

Учение Гамильтона о линейной векторной функции — источник современной теории линейных преобразований векторов; важнейшие результаты этой теории получены в исчислении кватернионов, правда, часто их трудно распознать современному читателю из-за непривычности формы и «чуждых» методов. Автор дал следующее определение «линейной и векторной функции»: «Положим для краткости $\nu = \Phi(\rho)$ или просто $\nu = \Phi\rho$; векторная функция будет линейной или дистрибутивной, если

$$\Phi(\rho + \rho') = \Phi\rho + \Phi\rho'; \quad \Delta\Phi\rho = \Phi\Delta\rho; \quad \Phi(x\rho) = x\Phi\rho.$$

В «Элементах кватернионов» (1866) Гамильтон вместо приведенного определения дает довольно расплывчатое описание.

Нечеткость определения компенсировалась тем, что Гамильтон записывал любую линейную векторную функцию в виде

$$\Phi\rho = \beta S.\alpha\rho + \beta' S.\alpha'\rho + \beta'' S.\alpha''\rho,$$

это «стандартная триномиальная форма для линейной и векторной функции вектора».

Главной задачей этого раздела теории было решение линейного уравнения $\Phi\rho = \sigma$, т. е. обращение функции Φ . Сначала Гамильтон рассматривал некоторые частные случаи (функции Φ), например уравнения $V.\alpha'\alpha\rho = \sigma$, $V.q\rho = \sigma$ и другие, а затем — «самый общий возможный вид ЛИНЕЙНОГО и ВЕКТОРНОГО УРАВНЕНИЯ

$$\sum \beta S.\alpha\rho + V.q\rho = \sigma.$$

Общий метод решения был усовершенствован и самим Гамильтоном, и Тэтом, но в основных чертах все наиболее важные приемы были созданы к 1853 г.

Гиббс распространил кватернионный метод и, исходя из гамильтонова представления векторной функции, сделал следующий шаг: он записал линейную функцию «отделив» оператор

$$\Phi\rho = (\beta S.\alpha + \beta' S.\alpha' + \beta'' S.\alpha'') \cdot \rho,$$

где, очевидно, выражение в скобках не имеет «самостоятельного» смысла и является оператором, применяемым к ρ . Это преобразование настолько близко духу теории кватернионов (вспомним символ ∇), что поистине удивительно то возмущение, с которым оно было встречено кватернионистами. В самом деле, запись Гиббса $\Phi\rho = (\dots) \cdot \rho$ ничуть не бóльшая «вольность», чем общепринятые в теории кватернионов операторы $S.\alpha$, $S.V.\alpha\beta$ и т. п.

В 1854 г. Гамильтон (одновременно с Кэли) вывел характеристическое уравнение линейного преобразования, которое долго называли «символическим уравнением Гамильтона—Кэли» или «символическим кубическим уравнением». Он обнаружил, что существуют векторы, «не меняющие своего направления» при линейном преобразовании, но написал о них всего несколько фраз. Таким образом, собственные векторы совершенно затерялись среди бесчисленных вспомогательных векторов и других векторов с интересными свойствами.

Любопытно, что современные симметрические преобразования (или нечто, родственное им) появились в теории Гамильтона почти без какой-либо связи с линейными преобразованиями (об этом в п. 3).

3. Перейдем к скалярной функции векторного аргумента, которая в теории Гамильтона теснейшим образом связана с векторной функцией векторного аргумента. В определении линейной функции содержалось утверждение: «...и если мы условимся писать $f(\rho\omega) = S.\rho\Phi\omega$, то скалярная функция f будет одновременно:

- 1) коммутативна или симметрична относительно двух векторов, от которых она зависит, и
- 2) линейна или дистрибутивна относительно каждого из них».

Эту и только эту скалярную функцию вектора изучает Гамильтон. В «Лекциях о кватернионах» он утверждает, что любая

линейная функция обладает свойствами 1), 2). Второе свойство, справедливость которого очевидна, он подробно доказывает, первое же оставляет без всякого обсуждения. Между тем, это свойство означает, что

$$S.\rho\Phi\omega = S.\omega\Phi\rho \quad \text{или} \quad (\rho, A\omega) = (\omega, A\rho).$$

Иначе говоря, Гамильтон вначале полагал, что любое линейное преобразование является симметрическим.

Мы проследили появление только привычных нам понятий и терминов, но в книге встречаются и десятки понятий, не прижившихся в математике, например, *vehend* («переносимое»), *ves-tum* («перенесенное»), *revector*, *provector*, *transvector*...

Необычность материала и новизна методов, неточности и ошибки, лаконичное изложение и сумбурное построение книги основательно мешали пониманию. Книгу и сейчас называют «нечитабельной». К сочинениям по теории кватернионов в полной мере относятся слова Клейна, сказанные о других работах Гамильтона: «О форме этих работ можно сказать все, что угодно, кроме того, что она безупречна; но несмотря на запутанное, неумелое расположение, на многочисленные намеки и повторения, эти работы содержат огромное богатство мысли» [23, с. 235].

Из замечаний Гамильтона, рассеянных в предисловии к «Лекциям» и в других статьях, отметим следующее. Получая многократно один и тот же результат различными рассуждениями, Гамильтон поступал так не ради проверки, «подстраховки», а из глубоко принципиальных соображений: «Но хотя возможно таким образом использовать геометрические рассмотрения, чтобы навести на мысль, подсказать и даже чтобы доказать законность многих общих преобразований, все же всегда желательно знать, как получить те же самые символические результаты из законов комбинации символов: так же и исчисление кватернионов не следовало бы считать завершенным, пока все такие эквивалентности форм не могут быть выведены из таких символических законов посредством наименьшего числа (и наипростейших) принципов» [59, с. 241]. Эти соображения относительно аксиоматического построения теории высказаны впервые в математике за 50 лет до исследований в школе Пеано и за 60 лет

до известной реплики Гильберта о независимости аксиоматически построенной теории от конкретной интерпретации.

Гамильтон верил, что создал универсальное исчисление, охватывающее математические, физические, астрономические науки. Последние годы жизни он совершенствовал исчисление кватернионов и искал новые приложения теории: задачи сферической тригонометрии, теории поля, теории определителей, поверхностей второго порядка, конических сечений... — все попытался исследовать Гамильтон кватернионными методами, все включить в эту теорию.

Глава 3

«Мы на правильном пути»

У. Р. Гамильтон

После смерти Гамильтона в 1865 г. признанным главой научной школы стал шотландский физик Питер Гесри Тэт. Уильям Томсон (лорд Кельвин) писал: «...Я думаю, что Гамильтон, умирая, определенно поручил ему теорию кватернионов...» Это же утверждал и Максвелл в шутливой характеристике: Тэт — это «человек, который получил кватернионное мышление (mind) прямо от Гамильтона».



П. Г. Тэт

Нотт (биограф Тэта) в книге «Жизнь и научные труды П. Г. Тэта» рассказывает: «Он был другом Гамильтона, Стокса, Эндрюса, Джоуля, Кельвина, Максвелла, Стюарта, Кэли, Сильвестра... Эти современники были для него личностями, а не просто авторами книг и статей. Он получил много от них, и они взяли много от него» [67, с. 2].

Тэт был сверстником и другом Максвелла со школьных лет, при окончании школы первым учеником был Кэмпбел (теперь

он известен тем, что написал биографию Максвелла), Тэт — третьим, Максвелл — шестым.

Получив образование, Тэт стал профессором математики в Королевском колледже в Белфасте (1854–1860). А затем начинается эдинбургский период его жизни (1860–1891) — преподавательская работа в качестве профессора натуральной философии (то есть физики) и сотрудничество с Уильямом Томсоном. Об их сотрудничестве и совместном труде «*Treatise on Natural Philosophy*» их современник Ф. Клейн писал (так сказать, с натуры):

«Это знаменитое сочинение Томсона и Тэта, которое студенты коротко называют $T + T'$, представляет собой очень своеобразное явление в нашей литературе вследствие резкого расхождения в свойствах и наклонностях обоих авторов, которые даже в своей совместной работе впадают в величайшее противоречие друг с другом.

Тэт был натурой доктринерской, отличался резким национализмом, притом он был несвободен от педантизма и чрезвычайно тщательно и последовательно проводил свои планы. Этой картине полностью соответствует то, что он был убежденным сторонником теории кватернионов. Томсон же, хотя он вообще был очень уступчив, раз навсегда отказался что бы то ни было слышать о кватернионах и даже в смягченной форме теории векторов не давал им доступа в свою книгу» [23, с. 279]. Останется навсегда невыясненным, как Клейн установил корреляцию между увлечением кватернионами и некоторыми не очень приятными чертами характера, но во второй части своего сообщения он совершенно правдив: Томсон в самом деле считал, что «кватернионы пришли от Гамильтона после его действительно хороших работ, и хотя они красиво и остроумно изобретены, тем не менее являются чистым злом для тех, кто соприкасается с ними... векторы никогда не будут иметь ни малейшей пользы для любого творчества» [51, с. VII]. Поскольку Тэта, Максвелла и Томсона связывала многолетняя дружба, то и следующие слова Клейна интересны для нашей истории: «...Томсон упорно противодействовал представлениям электромагнитной теории, сохраняя в этом полную последовательность, так как в его

механистическом мировоззрении не было места для этой теории. Попытки Герца, произведенные в 1888 г., пришли слишком поздно для того, чтобы они могли иметь какое-нибудь влияние на Томсона» [23, с. 279].

Можно упомянуть еще о таком курьезе: в 1860 г. Максвелл и Тэт одновременно подали документы «на конкурс» (на должность профессора колледжа в Абердине). Предпочтение было отдано Тэту, так как о нем шла слава великолепного лектора, а о Максвелле было известно только то, что он обладает некоторым видом интуиции! Нотт утверждал: «как лектор Тэт превосходил любого из своих современников».

Тэт — автор 365 статей и 8 книг; около 70 из этих работ посвящены теории кватернионов. Интерес Тэта к кватернионам возник, когда он увидел в «Лекциях о кватернионах» Гамильтона формулы, похожие на уже известные ему по статьям Гельмгольца. Он вступил в переписку с Гамильтоном, который поддержал интерес к теории и поощрил работу над подготовкой книги на эти темы. Полагают, что эта переписка в свою очередь побудила и Гамильтона к созданию новой книги «Элементы теории кватернионов». Многие страницы писем Тэта и Гамильтона целиком вошли в их книги. Для облегчения постоянной работы письма Гамильтона нумеровались римскими цифрами, а Тэта — арабскими. Письмо XIV Гамильтон писал с перерывами с 17 ноября по 5 февраля 1859 г., в результате оно состояло из 88 страниц. Тэт задержал публикацию «Трактата», чтобы книга Гамильтона вышла первой.

Чувство удовлетворения своим творением откровенно высказано Гамильтоном своему единомышленнику, ученику, коллеге: «Может ли что-нибудь быть проще или убедительнее? Не чувствуете ли Вы, так же как и я, что мы на правильном пути, и в будущем нам будут благодарны. Только неизвестно, когда...» [67, с. 134].

Тэт облек идеи Гамильтона в общедоступную форму. Филипп Келлэнд, автор более позднего учебника по теории кватернионов, свидетельствует: «Первая работа сэра У. Гамильтона „Lectures on Quaternions“ была очень неясна и совершенно непонятна

мне и, смею сказать, и другим до тех пор, пока проф. Тэт не опубликовал свои статьи по этому предмету в „Messenger of Mathematics“. Тогда, и не раньше, наука предстала передо мной во всей своей простоте».

Были у Тэта интересы и в других областях науки: статья о линейных дифференциальных уравнениях 2-го порядка, статья о мираже (как пример гамильтоновой оптики), в 1880 г. он предложил решение классической задачи о четырех красках (доказательство того, что 4-х красок достаточно для раскраски любой географической карты, таким образом, чтобы любые граничащие страны не были одинаково закрашены), ошибка в решении обнаружена только через 10 лет, наконец, он написал 9 статей о гольфе (в последние годы он был известен студентам как «отец Фредди Тэта»).



Ф. Келлэнд

Научная работа Тэта практически прекратилась с гибелью одного из его сыновей (в англо-бурской войне в 1900 г.). А вскоре последовала и смерть самого Тэта.

Тэту принадлежат многочисленные теоремы и результаты теории кватернионов.

Именно в его «Элементарном трактате по теории кватернионов» (1867 г. — 1-е издание; 1875 г. — 2-е издание; 1890 г. — 3-е издание) впервые приведено векторное изложение аналитической геометрии. Глава «Геометрия прямой и плоскости» отличается от современных учебников, вообще говоря, лишь обозначениями и второстепенными деталями. Так, один и тот же факт — коллинеарность двух векторов — мы выражаем уравнениями

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n},$$

а Тэт — условием: векторное произведение этих векторов равно нулю,

$$V.(\rho - \alpha)\beta = 0.$$

Аналогично уравнение плоскости в современных учебниках и в руководствах по теории кватернионов означает условие ортогональности двух векторов, соответственно в формах

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad \text{и} \quad S.v(\rho - \alpha) = 0.$$

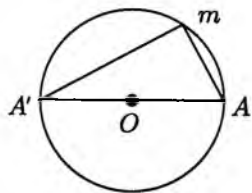
После введения этих уравнений Тэт предлагает такие же задачи, какие приведены и в современных учебниках: найти уравнение прямой, проходящей через две заданные точки; найти длину перпендикуляра, опущенного из данной точки на плоскость (прямую); найти условие, при котором четыре точки лежат в одной плоскости, и т. п. Таким образом, содержание и архитектура наших учебников определены Тэтом.

Разделы же о кривых и поверхностях второго порядка далеки от современных. Для примера приведем начало главы VII «О сфере и круговом конусе».

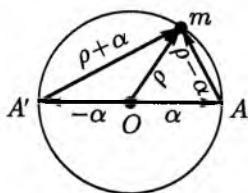
«§ 216. Уравнение сферы $T\rho = T\alpha$, $\rho^2 = \alpha^2$.

Из уравнения $S.(\rho + \alpha)(\rho - \alpha) = 0$ видно, что хорды, проведенные в конец диаметра (векторы которого суть $+\alpha$ и $-\alpha$), образуют друг с другом прямой угол» [76, с. 237].

К этому приложен чертеж, который, право же, ничего не проясняет. Если на чертеже Тэта расставить стрелки, обозначить векторы $\rho + \alpha$, $\rho - \alpha$ и пояснить, что в уравнениях $\rho^2 = \alpha^2$, $\rho^2 - \alpha^2 = 0$ фигурируют скалярные величины (и, следовательно, символ S . не вносит никаких изменений в равенство $\rho^2 - \alpha^2 = 0$), то становится ясно, что при любом радиус-векторе точки окружности два вектора $\rho + \alpha$, $\rho - \alpha$ взаимно перпендикулярны и угол, опирающийся на диаметр, — прямой.



Чертеж
из «Элементарного
трактата» Тэта



Чертеж иллюстрирует
доказательство теоремы: угол,
вписанный в полукруг, равен 90°

Кватернионная теория кривых и поверхностей второго порядка век назад, вероятно, понималась с таким же трудом, как и сегодня. Приведенный пример свидетельствует о том, как неоправданно мало пояснений содержали книги Гамильтона и даже «понятного» Тэта. В переводе его «Элементарного трактата» на французский язык (1882, 1884) доказательства автора довольно часто сопровождались комментариями переводчика (Пларра), превосходящими объемом текст, расшифровкой формальных преобразований, а иногда и некоторыми вариантами перехода от одних тождеств к другим.

Наконец, Тэт развил приложения теории кватернионов к геометрии и физике. Он применил «оператор, изобретенный Гамильтоном,

$$i \frac{d}{dx} + j \frac{d}{dy} + k \frac{d}{dz} \rangle^*,$$

к векторной функции и таким образом получил впервые понятия *дивергенции*, *ротора* векторного поля; эти результаты содержались в статьях 1862 г. Именно Тэт превратил наброски Гамильтона в связную теорию. Нотт писал об этом: «Гамильтон не развил теорию ∇ -функции ни в „Лекциях“, ни в „Элементах“. Это сделано Тэтом во втором издании его книги (в первом издании о *набла* только упомянуто) [67, с. 143].

Тэт подводит читателей к понятиям скалярного и векторного полей. Вначале термин *поле* у Тэта отсутствует, вместо него используются выражения «скалярная функция вектора точки» и «вектор σ — функция вектора точки ρ » (слова «электромагнитное поле» в статьях Тэта появляются только в 1890-е гг., т. е. когда слава Максвелла могла послужить интересам теории кватернионов). Пусть $\sigma = iP + jQ + kR$ — произвольная векторная функция. Если применить к ней оператор ∇ и произвести фор-

* Первые попытки ввести обозначения, ясно указывающие, что речь идет о частных производных, относятся к концу XVIII в. Современные

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \dots$$

вошли в обиход, благодаря Лежандру (1797, 1801) и Якоби (1837).

мальное умножение по кватернионным правилам, то получится

$$\begin{aligned}\nabla\sigma &= \left(i\frac{d}{dx} + j\frac{d}{dy} + k\frac{d}{dz}\right)(iP + jQ + kR) = \\ &= -\left(\frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dy} + \frac{dR}{dz}\right) + i\left(\frac{dR}{dy} - \frac{dQ}{dz}\right) + \\ &+ j\left(\frac{dP}{dz} - \frac{dR}{dx}\right) + k\left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy}\right).\end{aligned}$$

Мы видим, что слагаемые $S.\nabla\sigma$, $V.\nabla\sigma$ равны соответственно $-\operatorname{div}\sigma$ и $\operatorname{rot}\sigma$. «Чтобы дать интерпретацию... <величинам>, будем считать, что вектор σ означает перемещение (или лучше скорость) точки, расположенной в конце вектора ρ , и рассмотрим группу точек, лежащих вокруг конца ρ , так как величины $S.\nabla\sigma$ и $V.\nabla\sigma$ тесно связаны с деформацией рассматриваемой группы точек» [76, с. 125].

Если функция $\sigma(x, y, z)$ определяет скорость точки, Тэт констатирует, что вектор $V.\nabla\sigma$ направлен по оси вращения и равен удвоенной угловой скорости — составляющие были хорошо известны к тому времени; Тэт ссылается на работы Стокса и Гельмгольца (1845 и 1857 гг.). Тэт впервые приводит вывод: если вращения нет, то $V.\nabla\sigma = 0$, преобразование состоит в смещении по нормали. Однако приемы доказательств и рассуждений воспринимаются с некоторым трудом.

Как только определен оператор ∇ , Тэт вводит ряд кватернионных тождеств с ним, например

$$dF = -S.d\rho\nabla F, \quad S.\sigma\nabla = -\left(P\frac{d}{dx} + Q\frac{d}{dy} + R\frac{d}{dz}\right) = -D_\sigma$$

или

$$V.(d\rho V.\nabla\sigma) = (S.d\rho\nabla)\sigma - \nabla(S.\sigma d\rho).$$

Эти-то тождества и «работают».

В двух последних обширных главах «Элементарного трактата» («Кинематика» и «Физические приложения») Тэт часто пишет о заведомо известных вещах, поэтому приводит их без доказательства. В то же время он доказывает не менее известные

соотношения, вероятно, чтобы продемонстрировать эффективность кватернионных методов. Тэт записывает формулы Стокса и Гаусса—Остроградского в векторных обозначениях:

$$\int S \cdot \sigma \, d\rho = \iint S \cdot \nabla \sigma \, U \nu \, ds$$

и

$$\iiint S \cdot \nabla \sigma \, dv = \iint S \cdot \sigma \, U \nu \, ds.$$

Здесь уместно сделать короткое отступление и рассказать о введении понятий *криволинейного* и *поверхностного интегралов*, так как они были сравнительно новыми понятиями в математике. Впервые криволинейный интеграл встречается в работе Клеро (1743); там же приводится условие независимости интеграла от пути интегрирования. Криволинейные интегралы в общем виде ввел Коши в своих работах по функциям комплексной переменной (1825). У Тэта определение криволинейного интеграла очень аморфное. Выражение *путь интегрирования* применительно к криволинейному интегралу вошло в математический язык, благодаря французскому математику Виктору Пюизье (1850).

Поверхностный интеграл впервые появился в «Аналитической механике» Лагранжа (1788), правда, в такой нечеткой форме, что не всегда различались двойной и поверхностный интегралы. В своих ранних работах Лагранж, а затем и Лаплас решали только те задачи, которые сводились к двойным интегралам с постоянными пределами интегрирования. Гаусс в статьях (1813) вычислял поверхностные интегралы непосредственным суммированием и так подробно, что смысл понятия совершенно разъяснялся (он учитывал и сторону поверхности). После работ Гаусса запись формулы перехода от поверхностного интеграла к тройному в общем виде уже не представляла труда.



Дж. Г. Стокс

Соотношение между тройным и поверхностным интегралами было известно Пуассону (с 1828 г.), он прибегал к нему многократно, проводя выкладки каждый раз заново и не пользуясь им как формулой. В общем виде формула была выведена М. В. Остроградским в 1826 г. (опубликована в 1831 г.). Формула была переоткрыта еще раз Кронекером (1869), а затем — Тэтом. Формулу Стокса этот замечательный ученый открыл в 1854 г. Между прочим он предложил студентам на экзамене доказать найденное им соотношение; Максвелл справился с этой задачей.

* * *

В книге Тэта чрезвычайно важна пятая глава о линейных преобразованиях векторов, где изложены фундаментальные результаты, причем в очень четкой форме. «Элементарный трактат» служил учебным курсом. Здесь были сведены все известные результаты, которые не предполагалось разделять «персонально», и, хотя книга создавалась при постоянных контактах и консультациях с Гамильтоном, все же, видимо, заслуга Тэта очень велика.

«Элементарный трактат» содержит все те теоремы, которые входят в современный курс «матрицы». После того как введены сопряженные линейные функции, в книге рассмотрено характеристическое уравнение, доказано существование собственных векторов (именно Тэт доказал, что симметрическое преобразование имеет взаимно перпендикулярные собственные векторы и что в случае, когда корни характеристического уравнения действительны и различны, соответствующие им собственные векторы ортогональны). Он приводит выражение линейной векторной функции для случая, когда за базис приняты собственные векторы и т. д. Мимоходом при вычислениях и преобразованиях получает многие важные теоремы. В «первоначальном виде» их нелегко узнать. Например, при обращении линейной векторной функции получено соотношение

$$m\Phi^{-1}V.\lambda\mu = V.\Phi'\lambda\Phi'\mu.$$

К нему применен оператор $S.\Phi'\nu$, где ν — произвольный вектор, некомпланарный с λ и μ . После этого стандартные кватернион-

ные тождества дают

$$mS.\Phi'\nu\Phi^{-1}V.\lambda\mu = mS.\nu\Phi\Phi^{-1}V.\lambda\mu = mS.\lambda\mu\nu = S.\Phi'\lambda\Phi'\mu\Phi'\nu.$$

Таким образом,

$$m = \frac{S.\Phi'\lambda\Phi'\mu\Phi'\nu}{S.\lambda\mu\nu}.$$

Тем самым доказано, что отношение объемов параллелепипедов, построенных соответственно на образах трех векторов $\Phi'\lambda$, $\Phi'\mu$, $\Phi'\nu$ и на самих векторах λ , μ , ν , есть постоянная m . На следующих страницах Тэт показывает, что число m равно определителю матрицы линейного преобразования (с точностью до терминологии и метода доказательства!!!).

Книга Тэта демонстрирует разные методы, повторы, как правило, не вредят изложению; повествование остается четким, упорядоченным, хорошо продуманным (в отличие от книг Гамильтона). По-видимому, Тэт заслуженно пользовался славой одного из лучших лекторов и эти профессиональные навыки помогли ему создать превосходный учебник. Злые языки утверждали, что «экстраординарную многословность» Гамильтона не преодолел даже Тэт и что даже он не прочел «от корки до корки» последние два тома Гамильтона (800 страниц) — от Тэта не поступило опровержения.

Как пишет Нотт, «Труд Тэта в теории кватернионов уникален; по своему влиянию на развитие исчисления он занимает второе место после самого великого создателя теории. Тэт, кажется, единственный из современников Гамильтона был способен понять действительное значение метода непосредственно из „Лекций“ Гамильтона» [67, с. 120].

Великая заслуга, оказанная Тэтом кватернионам, состояла в том, что он познакомил с этой теорией своего друга — Джеймса Максвелла, который ввел векторные методы в электромагнитную теорию.

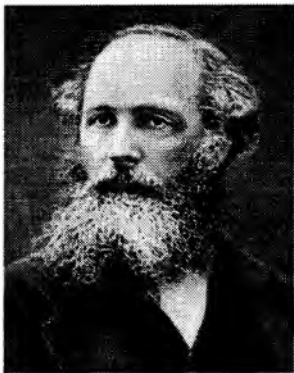
Глава 4

«Ценность идеи вектора несказанна»

Дж. К. Максвелл

Джеймс Клерк Максвелл происходил из состоятельной шотландской семьи. Его отец, Джон Клерк, унаследовав поместье родственника, присоединил его фамилию, Максвелл, к своей, как было принято в Шотландии. Мальчик имел любящего, умного, доброго отца, который оказал большое и благотворное влияние на его развитие. Мать Джеймса умерла от рака. От той же болезни в том же возрасте, сорока восьми лет, умер и великий ученый.

Джеймс Максвелл учился в школе в Эдинбурге (годом раньше Тэта). В шестнадцать лет он поступил в Эдинбургский университет, после его окончания завершил образование в Кембридже (до 1854 г.), где был оставлен для подготовки к профессорскому званию. Но в 1856 г. Максвелл переехал в Абердин, получив там кафедру физики. Ни в од-



Дж. К. Максвелл

ном университете Англии еще не было отдельной кафедры физики, а в шотландских университетах физика несколько ранее получила «права гражданства». Вероятно, Максвелл хотел быть поближе к отцу, который был болен; к несчастью, в том же году отец скончался.

В 1858 г. Максвелл женился. Те, кто знали чету Максвеллов, считали их очень не подходящими друг другу людьми. Все воспоминания о Максвелле, которыми мы располагаем, рисуют его благородным и привлекательным человеком «с необычайно ровным и, если хотите, святым характером», добрым и деликатным, хотя и способным на утонченный сарказм. Самое мягкое высказывание о миссис Максвелл — «трудная женщина», с уточнением, что следующая ступень — «невозможный человек».

В 1860 г. в Абердине колледжи объединились в университет и некоторые должности были ликвидированы, в том числе и должность Максвелла. Он принял кафедру в Лондонском королевском колледже. В 1861 г. его избрали членом Королевского общества — к этому времени он уже создал бессмертные работы. «Максвелл... выполнил первоклассные работы по динамике, астрономии, проблеме цветового зрения, кинетической теории газов, термодинамике и, прежде всего, по электромагнетизму!... причем любой из подавляющего большинства физиков был бы счастлив, если бы ему удалось выполнить работу такого масштаба, пусть даже в одной области исследований» [30, с. 90].

В 1865 г. Максвелл переехал в свое поместье. Там он много читал, изучал философию, теологию, писал стихи; готовясь к путешествию по Италии, он легко овладел итальянским языком (сообщают, что из языков ему трудно дался только датский!), но кроме этого Максвелл работал над двумя книгами: «Теория теплоты» и «Трактат об электричестве и магнетизме». «Трактат» был окончен в Кембридже, где Максвелл жил с 1871 г. В Кембридже Максвелл возглавил учрежденную кафедру экспериментальной физики и принял Кавендишскую лабораторию, которая еще строилась.

Максвелл открыл науке Кавендиша — великого затворника и оригинала, сделавшего замечательные открытия в физике

и химии (например, закон Кулона за 12 лет до Кулона), но ничего не публиковавшего. Его работы пролежали в архиве более 100 лет. Максвелл получил 20 пакетов рукописей Кавендиша и готовил их издание пять лет: изучил все труды, собственноручно их переписал, повторил большую часть опытов и уточнил многие результаты. Два тома трудов Кавендиша вышли в свет в 1879 г.

В те годы физических лабораторий как таковых не было — ученые проводили опыты дома или в клетушках, на чердаках. Но когда физические открытия остро понадобились промышленности, стали искать новые формы организации труда ученых — появились исследовательские институты и богато оснащенные лаборатории. Первые возникли в Гейдельберге (1863), Вене и Париже (1867). В Московском университете физическая лаборатория была создана благодаря усилиям А. Г. Столетова в 1873 г.

Свидетельством и великих целей, и великой ответственности Максвелла как человека, возглавившего научное учреждение, являются его слова: «...Творческая исследовательская работа — источник благосостояния нации...» Открытие Кавендишской лаборатории состоялось в июне 1874 г. Через пять дней после этого события газета «Московские новости» напечатала репортаж из Кембриджа молодого физика — Столетова.

В 1877 г. появились первые признаки болезни Максвелла. Он никогда ни на что не жаловался, только сдержанность его возрастала. Врач, лечивший его, отзывался: «Не было человека, который бы встретил смерть с бóльшим спокойствием и в более ясном сознании». Максвелл умер 5 ноября 1879 г.

* * *

К середине XIX в. в теории электричества и магнетизма было накоплено значительное количество экспериментальных результатов и некоторые теоретические выводы.

Начинается предыстория учения, конечно, в Древней Греции: Плиний и Лукреций предлагают разные версии происхождения слова *магнит* — оно появилось то ли в связи с городом Магне-

зией, то ли из-за пастуха Магнесса, то ли пришло из Индии. Ну, а *ηλεκτρον* — название янтаря, это известно всем. Единственные явления в области электричества до XVII в. — это электрический сом (в Ниле) и электрический скат (в Средиземном море). Что до магнетизма, то в IX в. арабы и китайцы знали компас.

Заслуга введения в науку экспериментального метода принадлежит Фрэнсису Бэкону и Вильяму Джильберту (сохраняем написание автора источника [29], откуда почерпнуты приводимые сведения). Книга Джильберта «О магните» (1600), видимо, первая в истории книга, посвященная электричеству и магнетизму. Вот несколько фраз из предисловия «к почтенному и интересующемуся магнитной философией читателю»:

«Так как в открытии тайн и исследований скрытых причин вещей от точных опытов и доказанных положений получаются более прочные выводы, нежели от вероятных догадок и мнений рутинных философов, то для лучшего понимания совершенно неизвестной доселе славной субстанции великого магнита, всеобщей материи Земли, и превосходных, выдающихся сил сего шара... а затем уже идти далее чрез очевидные магнитные опыты и впервые проникнуть в сокровенную глубь Земли, при помощи точных демонстраций...»

А далее: «В течение всего XVII столетия „De Magnete“ Джильберта являлась настольной книгой для всех, изучающих явления электричества и магнетизма» [29, с. 25]. В шести книгах автор знакомит читателей со своими опытами (I и II), в III книге строит теорию (!), IV и V книги посвящает явлениям наклона магнитной стрелки, в VI книге «говорит о Земле как о магните в целом, почему она висит в пространстве, вращается вокруг своей оси и около Солнца и т. п.» [29, с. 19].

Напомним себе, что книга Коперника опубликована только в 1543 г., что Галилей направит подзорную трубу на небо через 10 лет после «De Magnete», что еще не установлены законы Кеплера, что еще не родился Ньютон и нет закона всемирного тяготения!!

В названии книги употреблено слово *electricam*, так что сам термин «электричество» принадлежит Джильберту. Еще в

1890 г. (!) писали: «Gilbert будет жить, пока магнит не перестанет притягивать».

Вот некоторые факты из «Летописи открытий», составленной В. И. Лебедевым [29] (имена, совершенно неизвестные, опущены):

1269 г. замечено существование двух полюсов у магнита.

«Эволюция теоретических представлений об электрических явлениях в XVII столетии протекала медленно...

...если подвести итог тому, что было известно физикам к началу XVIII столетия, то окажется, что сведения эти были очень скудны. В 1698 г. описано явление искры при разряде. Было открыто притяжение, отталкивание и диффузное свечение в темноте наэлектризованных тел... В качестве источника электричества было известно только трение» [29, с. 28].

1729 г. замечена разница между проводниками и непроводниками электричества (т. е. общепризнано, что все непроводники «непроницаемы» для электрической жидкости).

1742 г. введен термин *кондуктор* (проводник).

1744 г. Даниил Бернулли впервые придает магниту подковообразную форму.

1745 г. на заседании Берлинской академии наук впервые зажигают эфир электрической искрой. Эйлер должен был присутствовать при этом (он отвергал существование электрической материи, но вера в электрическую жидкость еще продержалась)...

1752 г. установлена электрическая природа молнии.

1753 г. погиб Рихман. «Не всякому физiku предопределено умереть с такой славой, с какой умер Рихман» [29, с. 165–174].

1785 г. установлен закон Кулона; до него все явления описывались только с качественной стороны. Кулон написал 7 мемуаров (с 1784 по 1789 г.)

1795 г. опыты Гальвани и Вольты.

Около 1800 г., узнав об открытии Вольты, Х. Дэви занялся экспериментами в области электрохимии. К 1806 г. он уже мог подвести интересные итоги в докладе Королевскому обществу «О некоторых химических действиях электричества». Он поставил вопрос о существовании положительного и отрицательного

электричества; электрические заряды обозначил плюсом и минусом физик Лихтенберг.

В 1819 г. Эрстед обнаружил, что проводник с током может отклонять магнит.

Копенгагенский профессор опубликовал брошюру (5 страниц) «Опыты, касающиеся электрического конфликта на магнитную стрелку» (*Experimenta circa efficaciam electrici in acum magneticam*). На очередном съезде естествоиспытателей (в Швейцарии, в августе 1820 г.) Эрстед рассказал о своих опытах. Открытие произвело сенсацию. Присутствовавший в Женеве Араго сообщил о замечательном открытии Эрстеда на заседании Французской академии наук 4 сентября 1820 г. По общему желанию Араго произвел этот опыт через неделю. И с этого дня с периодичностью в одну неделю последовали доклады об открытиях — Ампера, Араго, Пуассона, Био и Савара (которые установили к 1821 г. первый точный закон этого взаимодействия, вычислив силу, с которой круговой ток действует на магнитный полюс).



Х. К. Эрстед

Ампер открыл, что провод с током обладает всеми свойствами магнита, и исследовал математические законы взаимодействия между электрическими токами (с 1822 по 1826 гг.)

Георг Ом сформулировал «закон Ома» в 1827 г.

С 1831 г. в Геттингене началась плодотворная совместная работа Гаусса, который в это время был на вершине славы, и молодого Вильгельма Вебера. Именно в это время Александр фон Гумбольдт развернул работы по изучению магнитного поля Земли; его целью было установить сеть наблюдательных пунктов по всему Земному шару. Многие из теорий того времени предполагали наличие нескольких полюсов. Вклад Гаусса не только три статьи на эти темы (1832, 1839, 1840 гг.), но и создание магнитной обсерватории (1833), основание «Магнитного Союза» и его журнала, а также публикация атласа земного магнетизма.

Отсюда возникли работы Гаусса по теории потенциала и шаровым функциям. Магнетизм у Гаусса — *магнитная жидкость*.

Вебер в 1846 г. сформулировал так называемый закон Вебера, согласно которому между движущимися зарядами действует мгновенная сила

$$K = ee' \left\{ \frac{1}{r^2} - \frac{1}{c^2 r^2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{1}{c^2 r} \cdot \frac{d^2 r}{dt^2} \right\},$$

которая зависит от относительной скорости и от относительного ускорения обеих частиц. Значение c (веберовской постоянной) было найдено Вебером и Кольраушем в 1855 г. «Этот закон в течение 50 лет считался последним словом в области физического объяснения природы, пока не был вытеснен после упорного сопротивления теорией Максвелла» [23, с. 52].

Итак, развитие теории достигло такого уровня, что можно было даже рассчитывать на «эффективность» и «внедрение».

Первую действительно работающую машину сконструировал Б. С. Якоби, брат знаменитого математика. В 1834 г. он представил ее описание Парижской академии наук, а в 1838 г. она приводила в движение по Неве бот с 12 пассажирами. В 1837 г. Якоби высказал идею о техническом применении гальванопластики.

Мысль об электрическом телеграфе родилась, как только был установлен факт технически легкой передачи электросигналов на большие расстояния. Почти все виды электрических явлений по мере возникновения поочередно применялись для телеграфии: линия с сигнализацией электрическими искрами, сигналы — отклонения магнитной стрелки в одну или другую сторону (этот предшественник азбуки Морзе использовался Гауссом и Вебером). Начиная с 1837 г. Уитстон стал вводить на железных дорогах Англии стрелочный телеграф (между Вашингтоном и Балтиморой). Первая модель Морзе была готова к 1835 г.; в 1844 г. открыли первую линию, оборудованную аппаратами Морзе. Конечно, сейчас это привычная деталь современной жизни, но почти двести лет назад изобретение воспринималось как чудо: «Возможность передавать мысли людей на расстояние 200 тысяч миль в секунды представляет собой самое чудесное открытие

в летописях всех народов» (Р. Оуэн, социалист-утопист). В 1869 г. Эдисон изобрел телеграфный аппарат для деловых контор и бирж. Не за горами (1875–1876) было и изобретение телефона Беллом, уже шли разговоры о прокладке трансатлантического кабеля между Европой и Америкой...

Именно в это время и появились работы Майкла Фарадея. «Этот в высшей степени оригинальный и несомненно гениальный физик не только подтвердил и исправил все работы своих предшественников в этой области, но и сам был творцом величайших открытий... Его великие экспериментальные открытия: гальваническая индукция, законы электролиза, магнетизация света и диамагнетизм встретили горячее сочувствие и распространили повсюду славу Фарадея. Но идеи его, связанные с этими открытиями, встретили больше противников, чем друзей» [36, с. 282]. Автор этих слов объясняет причины: Фарадеем движут не господствующие идеи его времени, а собственные воззрения, которых современники не понимают и не разделяют.

Как высоко ценил Максвелл гений Фарадея, видно из сравнительной характеристики Ампера и Фарадея, данной им:

«Хотя он <Ампер> придерживается в своем изложении индуктивного метода, однако он не дает возможности заглянуть в лабораторию своей мысли. Мы не видим, каким образом у него одно заключение следует за другим, и едва можем верить, что Ампер действительно вывел свой закон из тех опытов, которые он описывает. Можно подозревать — и он даже сам рассказывает об этом, — что закон был открыт им другим путем, о котором он однако ничего не сообщает, и что уже потом, когда для закона им было найдено полное доказательство, все подмости, служившие для постройки здания, были удалены.

Совсем иначе действует Фарадей. Он сообщает о своих неудачных опытах столько же, сколько об удачных, и излагает свои предварительные, еще не созревшие идеи наравне с вполне зрелыми. Поэтому читатель, даже далеко уступающий ему по силе индукции, чувствует к исследователю скорее симпатию, чем удивление, и в нем почти рождается уверенность, что он и сам, при подходящих условиях, мог бы сделать такие же открытия.

Учащийся должен читать Ампера, чтобы по этому блестящему образцу узнать, как следует поступать при обосновании и проработке открытия. Но если он желает развить в себе научное мышление, ему следует тщательно изучать также и исследования Фарадея, так как последний, раскрывая перед читателем историю своих открытий и весь ход своих идей, вызывает читателя на критику того пути, по которому он шел, и вместе с тем, показывает, как следует вести научные изыскания» [36, с. 283].

После этих слов можно было бы и не приводить выдержки из сочинений Фарадея, и все же процитируем почти наугад взятые параграфы, чтобы показать стиль его работ (полное отсутствие математики в исследованиях этого гениального самоучки, обучавшегося в школе всего до 9 лет).

«§ 127. ...После того как края их, расположенные рядом, были покрыты амальгамой и наложены друг на друга и все это устройство проводилось между полюсами магнита, по проводам, прикрепленным к внешним углам пластинок, проходил электрический ток, и гальванометр показывал сильное отклонение. Однако если между ними прокладывался листок тонкой бумаги, то при повторении опыта не удавалось обнаружить никакого эффекта.

§ 128. Подобный вырез не мог бы заметно нарушить магнитную индукцию обычного рода, какая наблюдалась в железе, если бы она имела место» [42, с. 105].

Фарадей начал публиковать «Экспериментальные исследования по электричеству» в 1831 г.; эти публикации составили в общей сложности 30 серий с более чем 3000 параграфов. Параграфы были и в несколько строк (как § 128), и в две-три страницы. Опыты каждой серии решали определенную проблему.

Максвелл познакомился с «Экспериментальными исследованиями» еще студентом. Вероятно, склад мышления Фарадея был близок Максвеллу. «Что в высокой степени характерно для Максвелла, это мощная интуиция, поднимающаяся до высоты пророчества и сочетавшаяся с полной фантазии силой наглядного представления» [23, с. 287]. Его первые знаменитые статьи по теории электричества и магнетизма — «О фарадеевских сило-

вых линиях» (1855), «О физических линиях сил» (1861) и «Динамическая теория электромагнитного поля» (1864) облекали «плебейски обнаженные представления Фарадея в аристократические одежды математики» (Р. Милликен). Получив первую из этих статей, Тиндаль писал Максвеллу: «Весьма благодарен за любезное внимание, которое Вы оказали мне... Я никогда не сомневался в возможности математического описания открытых Фарадеем явлений, и Вы, вероятно, — один из тех, кто отрицает какой-либо другой, отличный от этого, подход» [42, с. 97].

Максвелл послал статью Фарадею и получил трогательный ответ:

«Сначала я даже испугался, когда увидел такую математическую силу, примененную к вопросу, но потом изумился, увидев, что вопрос выдерживает это столь хорошо.

Я не благодарю Вас за то, что Вы сообщили о силовых линиях, ибо Вы это сделали в интересах философской правды и из любви к ней. Но... Ваша работа приятна мне и дает мне большую поддержку» [30, с. 347]. Максвелл и Фарадей встретились в 1860 г.

Из слов Фарадея следует, что для него математика — испытание, а не подспорье. Впоследствии Эйнштейн скажет о нем: «Ум, который никогда не погрязал в формулах». Максвелл допускает, что отсутствие математического образования у Фарадея сыграло положительную роль: «Может быть, для науки является счастливым обстоятельством то, что Фарадей не был собственно математиком, хотя он в совершенстве знаком с понятиями пространства, времени и силы. Поэтому он не пытался углубляться в интересные, но чисто математические исследования, которых требовали его открытия. Он был далек от того, чтобы облечь свои результаты в математические формулы... Благодаря этому он получил досуг, который требовался ему для работы, соответствующей его духовному направлению, смог согласовать идеи с открытыми им фактами и создать если не технический, то естественный язык для выражения своих результатов» [30, с. 354].

Взгляды Фарадея на процессы электричества и магнетизма противоречили «презумпции дальнего действия» — общепринятой

установке, по которой между двумя зарядами мгновенно возникает сила притяжения (отталкивания), прямо пропорциональная... Фарадей же полагал и утверждал, что «Материя не может подвергаться действию магнитных сил, не участвуя сама в явлении и не проявляя, в свою очередь, известное влияние на магнитную силу». Вероятно, в неприятии теории Фарадея сыграло роль и отсутствие привычного научного языка — математических методов, и «незамысловатые» подручные средства, из которых творилась теория: «Немного проволоки и несколько старых кусков дерева и железа дали ему возможность сделать величайшие открытия» (Гельмгольц). Однако теория Фарадея не была слишком уж простой, Гельмгольц вспоминает, как он «часами просиживал, застрявши на описании силовых линий, их числа и напряжения...» [30, с. 353].

Даже когда открытия Фарадея стали широко использовать на практике, к его идеям продолжали относиться свысока, сомневались и иронизировали, а можно ли вообще под его теорию подвести математическую базу?

Итак, «непризнанные» теории Фарадея нуждались в математическом изложении. А тем временем математический аппарат был создан и ждал применения. Чтобы связать их воедино, нужен был человек, свободно владеющий обоими языками. Известный советский физик Т. П. Кравец так оценил положение: «Если мы теперь освоились с системой воззрений Фарадея, если его электромагнитное поле стало одним из наших основных знаний, если его система превратилась в стройную теорию и получила адекватное математическое выражение, то это заслуга Максвелла и только Максвелла» [30, с. 353]. Сам Максвелл о своей роли говорил слишком скромно: «Я только облек идеи Фарадея в математическую форму».

В предисловии к «Трактату» он писал: «Когда я перешел к изучению работ Фарадея, я понял, что его метод понимания тоже математичен, хотя и не представлен в условной форме математических символов. Я нашел также, что эти методы могут быть выражены в обычной математической форме и таким образом сопоставлены с методами признанных математиков» [69, с. IX].

Но Максвелл не только изложил результаты Фарадея на языке кватернионов, но и развил теорию Фарадея и включил оптику в электромагнитную теорию. Он привлек внимание физиков к тому, что в теории электричества и магнетизма оперируют с направленными величинами и, следовательно, естественным языком этой теории должно быть векторное исчисление, поэтому в письме Тэту он заявил: «Ценность вектора несказанна» [61, с. 144]. Однако в то время векторное исчисление существовало только как часть теории кватернионов. Из чудовищно разбухшего аппарата Максвелл экономно отобрал необходимое и создал удобный инструмент. Все, что выделил Максвелл из теории кватернионов, вошло в современный векторный анализ. Этот «векторный минимум» он изложил в координатной форме в «Предварительных сведениях». Этот вводный очерк Максвелла даже внешне не похож на кватернионное исследование, так как Максвелл не отказывался от декартовых координат. Начало очерка традиционно повторяется во всех учебниках физики: деление величин на скалярные и векторные. Здесь на 20 страницах он представил ту часть теории, которую целесообразно перенести в физику, и наметил направление развития теории. Это было сделано так четко, что Гиббс и Хевисайд, создавшие независимо друг от друга свои векторные системы, пришли практически к эквивалентным исчислениям.

«Одна из наиболее важных особенностей метода Гамильтона есть деление величин на скаляры и векторы. Скалярная величина может быть полностью определена заданием одного единственного числа. Ее числовое значение никоим образом не зависит от тех направлений, которые мы выберем для координатных осей.

Скалярные величины не включают в себя понятие направления. Объем геометрической фигуры, масса и энергия материального тела, гидростатическое давление в точке жидкости, потенциал в точке пространства — все это примеры скалярных величин.

Вектор, или направленная величина, требует для своего определения три числовые величины, проще всего понимать под ними числа, связанные с направлениями координатных осей...

Векторная величина имеет длину и направление, так что обращение ее направления обращает и ее знак. Перемещение точки, представленное прямой линией, которая проведена из ее начального положения в конечное, можно принять за типичную векторную величину, из чего и в самом деле возникло название *вектор*» [69, с.9].

Максвелл считал, что изобретение исчисления кватернионов — шаг в познании величин, связанных с пространством, который по своей важности можно сравнить только с изобретением пространственных координат Декартом. Кватернионы, как таковые, он не использовал: «Мы старались избегать процессов, требующих от читателя знания исчисления кватернионов. В то же время мы без колебаний вводили идею вектора, если была необходимость сделать это» [69, т. 2, с. 257]. Поэтому и *методы* теории кватернионов совершенно не использовались в исследованиях по электричеству и магнетизму.

Максвелл рассматривает не числа $u + ix + jy + kz$, а только частный случай — векторы $ix + jy + kz$. Поэтому в его работах i, j, k — единичные векторы — не мнимые единицы и не операторы-верзоры. Но правила умножения — кватернионные, т. е. $i^2 = -1, \dots$ и имеют место соотношения (2.1), (2.2), (2.3), с. 34, 37, 39 соответственно.

Следуя Фарадею, Максвелл вводит понятие *электрического поля*. Фарадей определял силовые линии следующими словами: «Под магнитными кривыми я разумею линии магнитных сил, которые могут быть весьма разнообразны в зависимости от расположения полюсов и по которым располагаются железные опилки, или же линии, к которым направления очень маленькой магнитной стрелки образуют касательные» [42, с. 83].

Определения силовых линий, данные Максвеллом в разных статьях несколько отличаются друг от друга. Вот пример одного из них: «Линия, описанная точкой, движущейся в направлении результирующей силы, называется силовой линией». Он приводит уравнения силовой линии в виде

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{dx}{ds} = \frac{1}{b} \cdot \frac{dy}{ds} = \frac{1}{c} \cdot \frac{dz}{ds}.$$

По-видимому, Максвелл считал, что векторные представления этих понятий сохраняют ту осязаемую наглядность, какую они имели в замыслах Фарадея.

Фарадей назвал пространство, участвующее в передаче электрического действия, электрическим полем. Томсон, изучавший явления электричества (используя аналогии с явлениями теплопроводности), ввел термины поле *вихревое*, *безвихревое*, *соленоидальное* (1851). Слово $\sigma\lambda\eta\nu\epsilon\iota\delta\eta\varsigma$, которое в статьях об электрических явлениях употребил Ампер, означает «трубчатый», «подобный твердому». Все эти термины вскоре появились в статьях Максвелла; в 1864 г. он впервые вводит название *электромагнитное поле*. Максвелл формулирует *общее условие соленоидальности поля*:

$$\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} = 0, \quad \text{или} \quad S.\nabla\sigma = 0.$$

Первые замечания Максвелла о необходимости ввести нечто, соответствующее понятию Фарадея «электрическое состояние», относятся к 1853 г., т. е. к самому началу его работы; название *векторный потенциал* впервые употреблено в письме к Тэту (1871).

Тот факт, что математический аппарат теории Максвелла без изменений взят из теории кватернионов, наложил известный отпечаток на понятия, введенные Максвеллом. При кватернионном перемножении $\nabla\sigma$ получаются $\text{rot } \sigma$ и величина, которую Максвелл назвал *конвергенцией* (от *convergence* — «сходимость»). Эта величина, естественно, отличается знаком от принятой ныне дивергенции. Со временем, с заменой мнимых единиц единичными ортами $i^2 = j^2 = k^2 = +1$, стало употребляться исключительно понятие *дивергенции*. Термин и обозначение div предложил в 1878 г. английский математик Уильям Клиффорд. Впрочем, возможно, что к этому естественному изменению термина Максвелла самостоятельно пришел и Хевисайд.

Что касается градиента, то первоначально Максвелл ввел вектор, направленный противоположно современному $\text{grad } \psi$: «Я буду называть вектор **F** *склоном* скалярной функции ψ , используя слово *slope*, чтобы указать направление (и величину)

наиболее быстрого убывания функции ψ » [69, т. 1, с. 15]. Вероятно, термин вызван тем, что для функции двух переменных вектор указывает направление самого крутого склона поверхности $z = \psi(x, y)$.

Термин *градиент* образован из латинского *gradior* — «идти вперед». Понятие вошло в математику, благодаря немецким ученым — его принял Генрих Вебер и ввел в переиздания лекций Римана по дифференциальным уравнениям в частных производных. В «Трактате» Максвелл ссылается на работы Габриеля Ламе:

«Г. Ламе в своем *Traité des Fonctions Inverses* использует термин „дифференциальный параметр“, чтобы выразить величину этой наибольшей скорости убывания. Ни само понятие, ни способ, каким Ламе его использует, не указывают, что величина (*quantity*) имеет и направление, и длину (*magnitude*)» [69, т. 1, с. 15].

В статьях 1834–1837 гг. Ламе ввел понятие *функции точки*. По существу, это лучшее определение скалярного поля из всех, употреблявшихся в XIX в.: «Я буду называть функцией точки (*function-de-point*) любую величину, которая имеет определенное значение в каждой точке пространства, ограниченного или нет». Ламе установил, что для функции $v = v(x, y, z)$ выражения

$$\Delta_1 v = \sqrt{\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dz}\right)^2}, \quad \Delta_2 v = \frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{d^2 v}{dz^2}$$

являются инвариантами относительно преобразования координатной системы. Он назвал $\Delta_1 v$ и $\Delta_2 v$ «первым и вторым дифференциальными параметрами»^{*}.

Максвелл писал Тэту, что ему не нравится название «дифференциальный параметр», потому что параметр — скалярная величина, а нужно подчеркнуть, что результат применения ∇ к скалярной функции есть вектор; в этом письме он и предложил *slope of ψ* .

^{*} Ламе поясняет, что величине $\Delta_1 v$ можно дать «простое геометрическое определение, чего невозможно сделать для функций $dv/dx, dv/dy$! Он показывает, что $\Delta_1 v$ равняется производной функции v по направлению нормали к поверхности.

Результаты Ламе, переведенные Максвеллом на векторный язык, сразу же приобрели тот вид и ту форму, которые они сохранили до настоящего времени (в общих чертах). Это относится и к доказательствам формул Гаусса—Остроградского, Стокса. Во втором издании «Трактата» Максвелла (1881) отмечен приоритет Остроградского, по-видимому, впервые. Формулы записаны в координатах, так что в отличие от кватернионных пособий они имеют современный вид, с точностью до указания области интегрирования, а также в формулировках теорем нет принятых ныне оговорок о направлении обхода контура, гладкости поверхности и т. п. Единственное замечание касается этой стороны дела: «Существуют случаи, когда выполняются уравнения

$$\frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz} = 0, \quad \frac{dX}{dy} - \frac{dY}{dx} = 0, \quad \frac{dZ}{dx} - \frac{dX}{dz} = 0,$$

которые являются условием того, что $Xdx + Ydy + Zdz$ — полный дифференциал, а линейный интеграл от точки A до точки B все-таки зависит от вида кривой. В этом случае один путь не может быть трансформирован в другой непрерывным движением без выхода из области» [69, т. 1, с. 17].

В статьях 1856 г. Максвелл «с большой неуверенностью» вводит название *curl* («локон», «завиток») или *rotation* («вращение») вектора σ в точке P для вектора

$$\nabla \sigma = i \left(\frac{dR}{dy} - \frac{dQ}{dz} \right) + j \left(\frac{dP}{dz} - \frac{dR}{dx} \right) + k \left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy} \right).$$

Некоторое время в употреблении был термин *curl*; в Германии Вихерт ввел близкое по смыслу и звучанию слово *Quirl* (1896); в России в начале XX в. встречается термин *керлевое поле*. В 1878 г. Клиффорд предложил название *rotator* и обозначение *rot*.

В письмах 1870 г. Максвелл обращался к Тэту за советом по поводу терминологии. Как называть ∇ ? Атледом (прочитанная наоборот «дельта»)? Хорошо ли звучит «convergence» для $S \cdot \nabla \sigma$? Какое слово принять *twist*, *turn*, *version*? Или это слишком для чистых математиков и ради Кэли стоит остановиться

на *curl* (согласно моде на завитки)? В разговоре с друзьями, в переписке с Тэтом, Томсоном, в стихах к Тэту он употреблял для оператора ∇ название *набла*, придуманное Робертом Смитом, другом Максвелла и Тэта. Так назывался остов ассирийской арфы, по форме похожий на ∇ .

Вероятно, стоит напомнить, что это было время всеобщего интереса к Востоку и увлечения им. В середине XIX в. велись большие раскопки в Двуречьи. В начале XIX в. Гротефенд на пари расшифровал вавилонскую клинопись, через 20 лет Шампольон изложил основы дешифровки египетских иероглифов. В Месопотамии была найдена библиотека Ашшурбанапала (30 000 глиняных табличек), в библиотеке — миф о Гильгамеше, который с точностью до имен тождественен мифу о Ное. Строго говоря, это была половина мифа. В 1872 г. Джорж Смит (гравер из Лондона) объявил, что он готов поехать в Месопотамию и отыскать недостающие фрагменты мифа. Набожная Англия была охвачена волнением... Смит нашел иголку в стоге сена! Нашел таблички с продолжением «истории».

Вернемся к нашей истории. Ясно, что термин появился на гребне моды. Обращаясь к Тэту, как к высшему авторитету, Максвелл называл его «мастером игры на набла». При жизни Максвелла слово не стало научным термином; Тэт употребил его в математической статье 1890 г.

Еще раз обратим внимание на то, что все формулы «Трактата» приведены в координатной форме. Ясно, что Максвелл хотел согласовать векторы с декартовыми координатами, а не противопоставить их друг другу. Об этом свидетельствует координатный язык его трудов и его вопросы к Тэту: «Отрицает ли декартова система идею вектора как реальной вещи в реальной жизни, поскольку они выражаются в единицах своеобразной шкалы корней из -1 ?» [67, с. 161].

Опубликованные в 1911 г. в книге Нотта фрагменты переписки Максвелла и Тэта (сохранились только письма Максвелла) говорят о том, что Максвелл размышлял над теми чертами теории кватернионов, которые затрудняли непосредственное приложение векторных методов к решению физических проблем, т. е.

именно над теми же вопросами, которые обсуждались в ожесточенной полемике двадцать лет спустя. Максвелл писал, что в биллинге (опять восточные ассоциации: *биллингва* — двуязычная надпись, используемая, как правило, для расшифровки текста), когда налицо и векторы, и координаты, отрицательный квадрат вектора «вызывает беспокойство (если выбирать самое мягкое выражение), это очень большое неудобство при переходе от одного языка к другому — надо менять знаки у величин и постоянно отмечать, на каком же языке говорят о величине. Как примирить эти факты — что квадрат вектора AB всегда положителен в декартовой системе и всегда отрицателен в теории кватернионов? Как пахать одновременно и на быке, и на осле?» [67, с. 151].

В другом письме (1873) Максвелл обсуждал тему, также позднее затронутую Хевисайдом: в теории кватернионов многообразие форм смешивает все вещи, даже в одной формуле величина имеет разный смысл в разных местах. Максвелл очень мягко иронизирует: «В следующем издании сообщите нам, где и какую роль играет ds ».

Судя по письмам, позиция Максвелла, определенно, ближе к взглядам Гиббса и Хевисайда, чем к взглядам кватернионистов. Видимо, современники это заметили. А. Макфарлан писал: «В кватернионной неортодоксальности Максвелла... мы имеем начало школы векторного анализа, противостоящего чистым кватернионам». Наоборот, «чистые кватернионисты», цитируя письма, доказывали, что Максвелл, «ведомый Тэтом», был истинным приверженцем теории Гамильтона: «Он имел слишком большое уважение к основателю теории кватернионов и слишком глубокое понимание внутренней природы исчисления кватернионов, чтобы счесть целесообразным играть с далеко простирающимися фундаментальными принципами» [67, с. 152]. В этой борьбе за Максвелла шли даже на некоторое передергивание фактов: «Следующее письмо Максвелла, — сообщает Нотт, — показывает, как ясно он оценивал значение кватернионных обозначений», а в письме Максвелл как раз отходит от этих обозначений и от языка этой теории и вместо самых распространенных $V.q$, $S.q$ он пишет «чистый скаляр, чистый вектор» и т. п.

В молодые годы Томсон и Тэт развлекались тем, что составляли списки современников, располагая их «по гениальности»; Максвелл, как «слишком молодой», ни разу не фигурировал в них. Время поставило все на свои места. К 1911 г. истинное величие Максвелла уже стало очевидным. И когда Нотт писал «Жизнь и научные труды Питера Тэта», он хотел представить Максвелла соратником Тэта: «Кватернионная работа Тэта — действительно предшественник... символизма и номенклатуры, которые ввел Максвелл в своей книге. Тэт выявил реальное физическое значение величин ∇u , $S.\nabla u$, $V.\nabla u$, максвелловы выразительные названия „конвергенция“ (или дивергенция) и curl проникли в душу электромагнитной теории. Предложенное им слово *slope* заменено *градиентом* или *grad*, словом большей этимологической понятности. Но суть в том, что Максвелл увидел далеко простирающуюся важность этих понятий только после того, как они были представлены Тэтом в их простом кватернионном облике. Ламе, Грин, Гаусс, Стокс, Кельвин и другие имели более или менее разрозненные идеи и использовали их в анализе; но только благодаря одному исчислению Гамильтона, развитому Тэтом, важные отношения между Gradient, Divergence, Curl явились как часть целого... Это впервые реализовано Максвеллом, который благодаря помощи Тэта, принял Гамильтонов символизм...» [67, с. 166].

Факты свидетельствуют о другом: векторы, отвергаемые вместе с теорией кватернионов, были введены в физику Максвеллом, но только векторы — ничего из методов (и символизма) теории кватернионов Максвелл не использовал. Для многих ученых книга Максвелла — первое знакомство с векторным исчислением, которое допускало бы изложение на языке координат. Не случайно два ближайших поколения ученых, внесших вклад в развитие векторного исчисления в конце XIX — начале XX вв. — представители физических наук.

Значение «Трактата по электричеству и магнетизму» Максвелла для развития векторного исчисления невозможно переоценить. «Трактат» имел еще и, так сказать, «нелинейный эффект», важный для дальнейшего развития векторного исчисления.

Р. Э. Пайерл, например, пишет в статье «Теория поля со времен Максвелла»: «Я не уверен в том, что труд Максвелла по электромагнетизму является крупнейшим его вкладом в науку, потому что он сделал много вкладов, но этот труд является, конечно, тем, который мы прежде всего связываем с его именем. Если вы разбудите физика среди ночи и скажете „Максвелл“, он, наверняка, ответит „электромагнитное поле“».

...После усвоения идей Максвелла физики привыкли к восприятию в качестве основного физического факта утверждения, что существует некоторое поле определенного рода в определенной точке пространства, так как уже давно нельзя было ограничиваться электромагнитным полем. Много других полей появилось в физике, и, конечно, мы не желаем и не ожидаем объяснения их через модели разного типа.

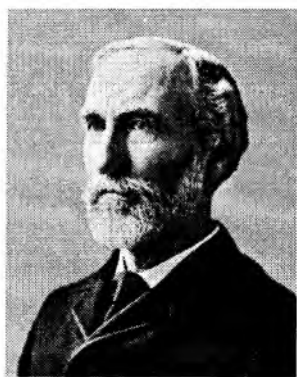
Исторически следующим появившимся полем было гравитационное поле» [30, с. 270, 277].

Глава 5

«Вектор не требует поддержки мнимости»

Дж. У. Гиббс

Имя Гиббса хорошо известно физикам и гораздо меньше математикам, хотя именно ему принадлежит основная часть заслуг «математизации» физики: «Мало, кто помнит, что первый крупный шаг на пути к изощренной в математическом отношении



Дж. У. Гиббс

теории — введение фазового пространства с его чудовищным числом измерений — был сделан Уиллардом Гиббсом. Следующие два шага на пути к математически изощренной теории хорошо известны — создание теории относительности и квантовой механики». Великий американский ученый Джозайя Уиллард Гиббс родился в семье, шесть поколений которой славились ученостью; его отец был филологом и теологом. Гиббс окончил университет в родном городе Нью-Хейвен. Он был первым человеком в США, получившим степень доктора технических наук. В 1863–1866 гг. Гиббс преподавал латынь и физику в университете, а следующие три года он провел в Европе, где завершал

образование. В Париже в это время читали лекции Шаль, Дюамель, Лиувиль, Дарбу; в Берлине — Кундт, Вейерштрасс, Кронекер; в Гейдельберге — Кирхгоф, Г. Кантор, Бунзен, Гельмгольц.

«За исключением трехгодичного пребывания в Европе, непродолжительных поездок на научные конференции и летних путешествий, он не выезжал из родного города. Больше того, Гиббс прожил почти 60 лет в одном и том же доме, от которого было полквартила до школы, где он учился, один квартал до колледжа, где он провел студенческие годы, два квартала до университетского кабинета, где он писал свои работы, и меньше двух кварталов до будущего места его захоронения» [43, с. 5].

Отец Гиббса оставил детям некоторый капитал, поэтому Гиббс мог жить на небольшой доход и стать в 1871 г. «профессором математики без жалования на факультете философии и изящных искусств Йельского университета». Первые же его научные статьи (по термодинамике, 1872–1873 гг.) содержали значительные результаты.

Первым, кто отметил «весьма важный вклад в термодинамику... проф. Уилларда Гиббса из Йельского колледжа», был Максвелл. Он говорил об этом на заседании Английского химического общества, писал в четвертом издании книги «Теория теплоты» (1875), в Британской энциклопедии (статья «Диффузия») и даже на открытии Международной выставки научных приборов темой его речи перед королевой Викторией было «блестящее исследование одного неизвестного молодого американца» (1876).

В Европе работы Гиббса знали лучше, чем у него на родине. Они сложны, «математичны» и написаны очень сжато (А. Пуанкаре жаловался, что каждую строчку Гиббса приходится брать с бою). Гиббс «принадлежал всецело к типу осторожных и до щепетильности добросовестных исследователей, долго вынашивающих свои работы, но зато доводящих их до такого совершенства, какое только доступно человеческим силам» [43, с. 60]. Его труды могли оценить тогда очень немногие люди в мире — такие, как Максвелл, Ван-дер-Ваальс, вант-Гофф, Гельмгольц, Герц. В 80-х гг. XIX в. имя Гиббса приобрело известность в узком,

но избранном кругу ученых мира. В 1897 г. Гиббса избирают членом Королевского общества в Лондоне; при жизни Гиббса такой чести удостоились еще только три американских ученых. Затем уже последовало избрание Гиббса в академии и научные общества многих стран.

«Как человек Гиббс станет понятен лишь тогда, когда мы уясним себе, что он жил полной жизнью в уединенном мире своего творчества... Он был счастлив, потому что знал, на сколько велик его труд... Гиббс был одним из тех людей, чью скромность можно назвать страстью» [40, с. 73]. Даже близкие друзья узнали об истинном значении его научной деятельности и его успехах из некрологов. Для своих близких (Гиббс жил в семье своей сестры) этот уравновешенный, мягкий человек, с типичным лицом янки, со склонностью к спокойному юмору был «воплощением доброты и великодушия», «самым счастливым, самым безмятежным человеком». Он умел нести смешную чепуху, готовить салаты, затевать веселые игры и шалости и не очень стремился к новым знакомствам. Его студенты вспоминали о нем как о «величайшем преподавателе и величайшем уме».

Научные занятия Гиббса допускают четкую «периодизацию»: первое десятилетие преобладала термодинамика и химия, затем — статистическая механика; работы по векторному анализу были чем-то вроде «интеллектуального отдыха».

В трехвековой истории современной науки можно насчитать не более десятка идей такой важности и глубины, как теория равновесия, принадлежащая Гиббсу. Ньютон расширил представление о равновесии, включив в это понятие движение; Гиббс включил в него изменение состояния материи. Гиббс создал законы физической химии.

«В течение пятидесяти лет после открытия Гиббса химия проникла во все главные отрасли мировой индустрии.

Благодаря результатам работ Гиббса, выплавка стали сделалась химическим процессом, так же как и выпечка хлеба, изготовление цемента, добыча соли, производство жидкого топлива, бумаги, вольфрамовой нити для электрических лампочек, одежды и сотни других предметов.

Труды Гиббса были использованы также для объяснения действия вулканов, физиологических процессов, происходящих в крови, электролитического действия аккумулятора и для производства химических удобрений.

В течение пятидесяти лет после смерти Гиббса четыре раза Нобелевская премия присуждалась работам, основанным на его трудах» [40, с. 73].

В 1889 г. Оствальд предложил Гиббсу опубликовать перевод трех его работ по термодинамике в серии «Ostwald's Klassiker». Книга была издана в 1892 г.

С 1877 г. Гиббс начал читать курс электричества и магнетизма, основанный на «Трактате» Максвелла, а с 1879 г. — курс векторного анализа. Гиббс колебался, как назвать дисциплину — векторной алгеброй или векторным анализом; оба названия сохранились в математическом языке. Гиббсу принадлежат следующие работы по векторному анализу: курс аналитической механики (в векторном изложении), который он прочитал в университете в Балтиморе (1880), две брошюры «Элементы векторного анализа для студентов-физиков». Эти книжечки, которые в литературе принято называть *памфлетами*, частным образом были отпечатаны в типографии (1881, 1884). И, наконец, доклад «О кратных алгебрах» (1886), прочитанный в Американской ассоциации развития наук. В кратком предисловии к «Элементам векторного анализа» предмет рекомендуется как некая модификация метода кватернионов.

Гиббс разослал около 130 экземпляров брошюр ученым, для которых они могли представлять интерес. Сохранились списки адресатов; они демонстрируют знание всего научного мира, всего, что творилось (в смысле «созидалось») в физике и математике! В списке — Майкельсон, Тэт, Томсон, Рэлей, Фицджеральд, Стокс, Дж. Дж. Томсон, Кэли, Сильвестр, Дарвин, Хевисайд, Гельмгольц, Клаузиус, Кирхгоф, Лоренц, Клейн, ...а также восемь ученых из России — Рахманинов, Зернов и др. Любопытно, что «Элементы векторного анализа» посланы всем, кто был каким-то образом связан с Грассманом: его сыну, В. Шлегелю, Ф. Энгелю, Люроту, Цивету (переводчику на немецкий язык

«Механики» О. И. Сомова!). Опубликованы эти брошюры были лишь в 1906 г. в «Scientific Papers» Гиббса.

В 1901 г. отдельной книгой были изданы лекции Гиббса (с его предисловием), записанные и обработанные Эдвином



Э. Уилсон

Уилсоном. Книга озаглавлена «Elements of Vector Analysis for the Use of Students of Mathematics and Physics». Гиббс, занятый работой над «Статистической механикой», даже не просмотрел рукопись, однако сейчас очень легко определить параграфы, написанные «по Хевисайду» и «по Гиббсу».

История перехода от кватернионов к векторам изложена Гиббсом в письме к Шлегелю, ученику Г. Грассмана: Гиббс стал изучать кватернионы, чтобы овладеть методами Максвелла. «В то же

время я знал, что хотя методы назывались кватернионными, идея кватернионов совершенно чужда предмету...

Знакомством с работой Грассмана я тоже обязан электричеству... Я увидел, что методы, которые я использовал, близкие к гамильтоновым, были почти точно те же, что у Грассмана... Я не думаю, что труды Грассмана оказали особое влияние на мой „Векторный анализ“. Хотя я с радостью укрылся во ввводном параграфе за одним-двумя знаменитыми именами...» [78, с. 107].

Пожалуй сжатая характеристика брошюры «Элементы векторного анализа» состоит в следующем. Это извлечение из теории кватернионов всего, что вошло в современное векторное исчисление, с некоторой модернизацией кватернионных методов и языка, приближающей их к современным, и со значительным развитием теории линейных операторов.

Симпатии Гиббса к методам Грассмана выражались и в том, что каждые два-три года Гиббс читал курс лекций о кратных алгебрах (последний раз в 1902/03 учебном году) и собирался написать книгу об этом предмете. «...Однако мы не можем даже предполагать, каким бы он был, этот вклад в науку... Тот факт,

что мы мало находим его в курсе по кратной алгебре или в разрозненных бумагах, оставшихся после его смерти, в бумагах, которые должны были служить ему основой для публикаций по этому предмету, еще не свидетельствует о том, что с ним не погибла важная научная работа. Если бы Гиббс умер тремя годами раньше, невозможно было бы составить адекватное представление о статистической механике, уже практически созданной им» [78, с. 147].

Что понимал Гиббс под кратной алгеброй? Ответ можно найти в его докладе на эту тему (1886), который свидетельствует о том, что он был хорошо знаком с новейшими исследованиями по алгебре и мог бы быть первым историком предмета и видеть тенденции эволюции дисциплины: «...если мы спросим, в каком направлении развивается алгебра в наши дни, то... методы дают кратную алгебру... Теория мнимых величин обыкновенной алгебры, которая есть существенно простой случай кратной алгебры, с трудом получила признание в первой трети этого века. Мы должны отметить, что эта двойная алгебра, как она была названа Кэли, не была придумана или изобретена, она, непрошенная, сама явилась пред взоры математиков с уже сформированными методами.

Но идеи двойной алгебры должны были подсказать более или менее различные возможности других кратных алгебр, обладающих интересными или полезными свойствами.

Геометрические приложения двойной алгебры подсказали Гамильтону идею тройной алгебры... Он не смог найти удовлетворительную тройную алгебру, но открыл, наконец, *quadruple algebra*, кватернионы, которые отвечали его целям...» [54, с. 92].

Как кватернионы получаются при потере коммутативности произведения, так октавы (изобретенные Дж. Т. Грейвсом и Кэли) возникают при отказе от ассоциативности. Других «кратных алгебр» на этом пути быть не может, Гиббс не упоминает теорему Фробениуса, но пишет об установленной Б. Пирсом эквивалентности алгебры гиперкомплексных чисел и алгебры матриц (откуда можно было бы вывести теорему Фробениуса).

Учение о протяженных величинах Грассмана позволяет развивать теорию кратных алгебр в n -мерных пространствах,

поэтому Гиббс настойчиво привлекает внимание математиков к этому учению.

Гиббс полагал, что «время не было готово для методов Мёбиуса, Грассмана, Сен-Венана», хотя и отмечал: «Поразительный факт в истории предмета: короткий период (менее 20 лет) ознаменовался появлением хорошо развитых и важных систем кратных алгебр, авторы которых работали совершенно независимо друг от друга — в Британии, Германии, Франции. Появления и одной из этих систем было бы достаточно, чтобы сделать эпоху...» [54, с. 94].

К названным именам он добавил еще имена Кэли (знаменитый мемуар о матрицах — 1858 г.) и Сильвестра, который сказал о себе, что ему быть бы швейцаром в Королевстве Алгебры Второй. Эти слова Гиббс привел в статье, чтобы показать мнение Сильвестра о важности исследований по теории матриц. Но при этом, защищая приоритет Грассмана, добавил, что основы учения были заложены в «*Ausdehnungslehre*» (1844).

В этом докладе Гиббс называет и «Линейные ассоциативные алгебры» Б. Пирса, и «Лекции о принципах универсальной алгебры» Сильвестра, и работы Коши, Клебша и Клиффорда, Максвелла и снова Грассмана. Он сравнивает, главным образом, методы Гамильтона и Грассмана, но при этом еще и модифицирует учение Грассмана, что-то упрощая, а что-то оставляя за рамками статьи. Это, конечно, естественный факт, обусловленный хотя бы размерами статьи, но такие же «изменения» Гиббс вносит и в другие изложения теории Грассмана. То, что Гиббс излагает на понятном языке, и то, что он развивает из учения Грассмана, еще предстоит отделить друг от друга.

В заключение Гиббс призывает бросить со стороны взгляд на предмет и увидеть, что «ход современной мысли, кажется, просит ей помочь... адаптироваться к методам кратной алгебры»; он считает, что с точки зрения приложений самым естественным методом является векторный анализ: «На каждом шагу природа сама берет нас за руку и ведет нас, подобно тому, как мать учит своего ребенка ходить» [54, с. 114].

Через год статью с таким же названием «Кратная алгебра» написал Кэли, который подхватил идеи Гиббса.

Посмотрим, каковы основные черты векторного анализа Гиббса (будем именовать его учение так, чтобы отличать его от исчисления с векторами в рамках теории кватернионов).

Гиббс внес минимальные изменения в обозначения и язык; брошюра начинается определениями: «*Фундаментальные понятия*. Если что-то (anything) имеет величину и направление, то его величина и направление, взятые вместе, составляют то, что называется *вектором*.

В отличие от векторов действительные величины (положительные или отрицательные) обыкновенной алгебры называются *скалярами*.

Удобно, чтобы форма буквы указывала, что она означает: вектор или скаляр» [54, с. 17].

Так что Гиббс сохранил кватернионные обозначения векторов греческими буквами, скаляров — латинскими, а единичных векторов — через i, j, k , при этом i, j, k , названные «нормальной системой единичных векторов», теперь имели единственный смысл — единичные векторы с $i^2 = j^2 = k^2 = +1$ и с раз навсегда установленной ориентацией. Может быть в терминологии Гиббса сказалось влияние Грассмана — его «нормальная область»?

Гиббс не использует понятия линейной независимости векторов, лишь однажды встречается: «... α, β, γ представляют систему независимых величин». Он формулирует в явном виде теорему, которой Гамильтон и Тэт часто пользовались как очевидной: «Если α, β, γ — произвольные известные векторы, не параллельные одной и той же плоскости, то любой вектор ρ может быть выражен в форме $x\alpha + y\beta + z\gamma = \rho$ ».

Гиббс определяет разные виды произведений векторов. Он называет скалярное произведение «прямым или точечным произведением», оно соответственно обозначается

$$\alpha \cdot \beta \quad \text{и равно} \quad x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

Векторное произведение названо «косым или крестовым», обозначено $\alpha \times \beta$ и выражено определителем. Вводя векторное

произведение, Гиббс отходит от определения Гамильтона, связывающего направление вектора $\alpha \times \beta$ с направлением координатных осей.

«Косое произведение α и β есть некоторая функция от α и β . Ее величина (magnitude) получается перемножением величин α и β и синуса угла, образованного направлениями этих векторов. Ее направление образует прямые углы с α и β и с той стороной плоскости, содержащей α и β (предполагается, что они проведены из общего начала), на которой вращение от α к β на угол, меньший 180° , кажется происходящим против часовой стрелки.

Направление $\alpha \times \beta$ может быть определено и как то, в котором движется винт, когда его вращают так же, как α вращается к β .

Или, иначе, если α направлен на восток, β лежит в той же горизонтальной плоскости на северной стороне от α , то вектор $\alpha \times \beta$ будет направлен вверх» [54, с. 21].

Позднее (в полемике) Гиббс объяснил введение своей символики вместо принятых в теории кватернионов $S.\alpha\beta$ и $V.\alpha\beta$: «Будет ли символ, означающий операцию, буквой или некоторым другим знаком? и будет ли он стоять перед векторами или между ними?... Кажется, мы получим наибольшую простоту и удобство, выразив обе функции $S.\alpha\beta$ и $V.\alpha\beta$ знаком, объединяющим векторы и намекающим на умножение... чтобы держаться в рамках ресурсов обычной типографии, я использовал точку и крест, которые уже связаны с умножением» [54, с. 158.].

Гиббс привел и другие произведения, например, смешанное (названное *тройным*, *triple*, и выраженное определителем).

Хотя Гиббс никогда не ставил цель — обойтись без системы координат, он часто подчеркивал, что та или иная формула, понятие не зависят от системы координат.

Гиббс придал терминам Гамильтона *коллинеарный*, *компланарный* современный смысл. Терминология Максвелла — *curl*, *atled* — сохранена без изменений, при этом, естественно, введены скалярное и векторное произведения $\nabla \cdot$ и $\nabla \times$.

В исследованиях Гиббса по векторному анализу отсутствуют названия скалярного и векторного полей. В книге Гиббса—Уилсона, например, дано определение: «Векторная функция

положения в пространстве есть функция $u(x, y, z)$, которая связывает с каждой точкой пространства (x, y, z) определенный вектор» [54, с. 149]. Манера изложения, таким образом, очень близка к стилю Ламе.

Особое внимание нужно обратить на определение оператора ∇ . Дифференциальное и интегральное исчисление векторной функции изложено во второй главе брошюры «Элементы векторного анализа». В первых же пунктах Гиббс вводит три определения трех функций ∇u , $\nabla \cdot \omega$, $\nabla \times \omega$.

«50. Определение. Если u — произвольная скалярная функция положения в пространстве (то есть произвольная скалярная величина, принимающая значения непрерывно меняющиеся в пространстве), то ∇u есть векторная функция положения в пространстве, которая в каждой точке имеет направление наибольшего роста функции u и по величине равна скорости этого возрастания на единицу длины. ∇u может быть названа производной функции u , а u — примитивной функции ∇u . Мы можем также за определение ∇ принять любой из пунктов 51, 52, 53.

51. Если ρ — вектор, определяющий положение точки в пространстве, то $du = \nabla u \cdot d\rho$.

$$52. \nabla u = i \frac{du}{dx} + j \frac{du}{dy} + k \frac{du}{dz}.$$

$$53. \frac{du}{dx} = i \cdot \nabla u, \quad \frac{du}{dy} = j \cdot \nabla u, \quad \frac{du}{dz} = k \cdot \nabla u.$$

54. Если ω — вектор, имеющий непрерывно меняющуюся величину в пространстве, то

$$\nabla \cdot \omega = i \cdot \frac{d\omega}{dx} + j \cdot \frac{d\omega}{dy} + k \cdot \frac{d\omega}{dz}, \quad (1)$$

$$\nabla \times \omega = i \times \frac{d\omega}{dx} + j \times \frac{d\omega}{dy} + k \times \frac{d\omega}{dz}. \quad (2)$$

Если мы положим

$$\omega = Xi + Yj + Zk,$$

то подстановкой этого выражения в (1), (2) мы получим

$$\nabla \cdot \omega = \frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz}$$

и

$$\nabla \times \omega = i \left(\frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz} \right) + j \left(\frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx} \right) + k \left(\frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy} \right),$$

что также можно рассматривать как определение ∇ » [54, с. 31].

Итак, Гиббс рассматривает ∇ только в сочетаниях $\nabla \cdot \omega$, $\nabla \times \omega$, ∇u и не вводит «символического вектора ∇ » или «оператора ∇ ». Это преобразует метод — исчезают соответствующие тождества и вместе с ними «автоматизм» доказательств, методы сближаются с привычными по математическому анализу, так как опираются только на формулы дифференцирования скалярных функций. Но при этом теряется оперативность методов теории кватернионов, которыми так гордились кватернионисты. Так, например, свойство $\operatorname{div} \operatorname{rot} \omega = 0$ уже не может быть получено как «тривиальное» — смешанное произведение трех векторов, из которых два (∇) равны. Свойство должно выводиться из определений пункта 54 проведением всех предписанных выкладок.

В книге Гиббса—Уилсона не столь последовательное изложение: «На этом пути большие преимущества достигаются рассмотрением

$$\nabla = i \frac{d}{dx} + j \frac{d}{dy} + k \frac{d}{dz}$$

как вектора.

Это не действительный (true) вектор, так как коэффициенты

$$\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \frac{d}{dz}$$

— не настоящие скаляры» [55, с. 147] Уилсон использовал, кроме лекций и брошюр Гиббса, статьи Хевисайда и книгу Фёппля «Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität» (1894).

Соединение нескольких источников очень заметно: «С некоторых точек зрения можно привести возражения против рассмотрения ∇ как символического вектора и введения $\nabla \cdot \omega$ и $\nabla \times \omega$

соответственно как скалярного и векторного произведений ∇ на ω . Эти возражения снимаются, если предположить, что символы $\nabla \cdot$ и $\nabla \times$ можно рассматривать как совершенно новые операторы, отличные от ∇ и определенные через

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \omega &= i \cdot \frac{d\omega}{dx} + j \cdot \frac{d\omega}{dy} + k \cdot \frac{d\omega}{dz}, \\ \nabla \times \omega &= i \times \frac{d\omega}{dx} + j \times \frac{d\omega}{dy} + k \times \frac{d\omega}{dz}.\end{aligned}$$

Но для практических целей и как формулу для запоминания кажется целесообразным рассматривать

$$\nabla = i \frac{d}{dx} + j \frac{d}{dy} + k \frac{d}{dz}$$

как символический вектор-дифференциатор. Этот символ подчиняется тем же законам, что и векторы, поскольку производные

$$\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \frac{d}{dz}$$

подчиняются тем же законам, что и обычные скалярные величины» [55, с. 151].

Такой подход был приемлем для различных систем векторного анализа и возмущал кватернионистов. Отвести оператору роль мнемонической формулы они не могли. Трактовка оператора ∇ вызвала критику Нотта: «Формула для запоминания!... трудно вообразить ум, находящий опору в таком произвольно построенном исчислении, когда уже работы Гамильтона и Тэта дали способ построения эффективного векторного анализа, в котором ∇ был реальным вектором-дифференциатором» [68, с. 619]. Как видим, слова *векторный анализ* уже получили «права гражданства», а ведь еще в 90-е гг. XIX в. кватернионисты употребляли их только с иронией. Заметим, что до книги Гиббса—Уилсона слова *символический вектор* не вызывали протеста, наоборот, были совершенно официальным математическим термином, и только через 50 лет такого словоупотребления Нотт вдруг начал настаивать на выражении *real vector-differentiator*.

Изложение векторного анализа, данное Гиббсом в лекциях, стало классическим и повторяется во всех современных курсах (с некоторыми изменениями в обозначениях и строгости). Приведем в качестве примера определение криволинейного интеграла:

«Пусть $w = w(x, y, z)$ — векторная функция положения в пространстве. Пусть C — какая-нибудь кривая в пространстве и r — радиус-вектор, проведенный из фиксированного начала в точку кривой. Разделим кривую на инфинитезимальные элементы dr . Образует сумму скалярных произведений этих элементов dr на значения функции w в некоторой точке элемента. Таким образом, получим $\sum w dr$. Предел этой суммы, когда элементов dr станет неограниченно много и каждый приближается к нулю, называется *line-integral* от w вдоль кривой C и записывается

$$\int_C w dr = \int_C [w_1 dx + w_2 dy + w_3 dz] \dots$$

необходимо точно указывать, в каком направлении радиус-вектор должен описывать кривую при интегрировании» [55, с. 179].

При определении поверхностного интеграла Гиббс таким же образом оговаривает: «Необходимо с величайшей тщательностью определять, *какой* нормалью к поверхности является da , то есть по какой стороне поверхности берется интеграл» [55, с. 186]. При этом выражения «сторона поверхности, положительная сторона» еще настолько новы, что Гиббс и подчеркивает слово «сторона» и добавляет в скобках «так сказать». До XX в. не принимались во внимание никакие соображения о гладкости кривой, поверхности. Впервые именно в чертежах Гиббса появляются стрелочки, указывающие направление обхода контура, сторону поверхности; привычным становится выражение *внешняя нормаль*. К этому времени Феликс Клейн уже придумал прием непрерывного перемещения основания нормали по поверхности (1875).

В курсе Гиббса не было слов *ориентированная поверхность, поверхности противоположных ориентаций* — все соответствующие термины ввел в 1883 г. Кипарис Стефанос — греческий

математик, учившийся в Париже у Дарбу. Как указание, что интеграл берется по замкнутому контуру, в книге Гиббса—Уилсона применялось обозначение

$$\int_0 w dr.$$

Современное обозначение

$$\oint$$

ввел в 1923 г. известный физик Крамерс.

В 1881 г. Гиббс предложил определение дивергенции векторного поля как предела отношения потока через замкнутую поверхность к объему, ограниченному этой поверхностью, при $\Delta v \rightarrow 0$ (вместе с замечанием, что оно не зависит от «используемой системы единичных векторов»). В дальнейшем, в начале XX в., эта формулировка послужила образцом для всевозможных определений, «не зависящих от системы координат».

* * *

Получив экземпляр «Элементов векторного анализа», Хевисайд написал в ближайшей своей статье (1891): «Векторная работа проф. Гиббса едва ли известна, а заслуживает широкой известности... Особого внимания заслуживает его трактовка линейного векторного оператора».

Глава V брошюры Гиббса озаглавлена по кватернионной традиции «Linear Vector Functions». По единодушному мнению,

«...алгебра диад... является его самым оригинальным вкладом в векторный анализ» [79, с. 129].

В трудах Гамильтона и Тэта линейная векторная функция была представлена в виде

$$\Phi \rho = \alpha S. \beta \rho + \alpha' S. \beta' \rho + \alpha'' S. \beta'' \rho,$$

конечно, отмечалось, что в соотношение входят девять независимых скалярных коэффициентов (как в современные уравнения линейного преобразования вектора). Грассман рассматривал

«экстенсивные дроби» и «выражения с промежутками», эквивалентные аффинорам. Однако самостоятельное развитие аффинорное исчисление получило только благодаря Гиббсу. Построенная им теория линейных операторов является существенным приближением к современной трактовке предмета.

Именно после работы Гиббса изложение теории начинается с определения линейного преобразования: «Векторная функция вектора называется линейной, если функция от суммы двух любых векторов равна сумме функций от этих векторов, т. е. если

$$\text{func.}[\rho + \rho'] = \text{func.}[\rho] + \text{func.}[\rho']$$

для всех ρ и ρ' , то функция линейная» [54, с. 52]. Напомним, раньше уже было оговорено, что Φ — непрерывная функция. Поэтому Гиббс мог доказать, что справедливо

$$\Phi[c\rho] = c\Phi[\rho].$$

В книге Гиббса—Уилсона появляется и второе определение, несомненно взятое у Хевисайда: «Говорят, что вектор r' есть линейная функция другого вектора r , если компоненты r' по трем некомпланарным векторам выражаются линейно (со скалярными коэффициентами) через компоненты r по тем же векторам» [55, с. 262]. Далее следует доказательство эквивалентности этих двух определений.

Записав линейную функцию в традиционной форме

$$\alpha\lambda \cdot \rho + \beta\mu \cdot \rho + \gamma\nu \cdot \rho,$$

Гиббс использует стандартный прием теории кватернионов: «Выражение, очевидно, представляет собой линейную функцию и может быть условно записано в виде $(\alpha\lambda + \beta\lambda + \gamma\lambda) \cdot \rho$ » [54, с. 53]. Два написанных рядом вектора без какого-нибудь знака операции между ними (то есть — оператор, как это видно из только что приведенной записи) Гиббс называет *диадой*, а такое «произведение» $(\alpha\lambda, \dots)$ — неопределенным. Умножение диады слева (или справа) на вектор ρ означает выполнение следующей операции:

$$\alpha\lambda \cdot \rho = \alpha(\lambda \cdot \rho) = \alpha a$$

(a — скаляр). Диада — оператор, преобразующий вектор ρ в вектор, коллинеарный α (или коллинеарный λ — при умножении на ρ слева).

Итак, линейное преобразование может быть записано в виде

$$\rho' = (\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu) \cdot \rho,$$

а линейная функция — как

$$\Phi = \alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu.$$

При этом буква Φ напечатана жирным шрифтом (1901 г., влияние Хевисайда!), как вектор, что подчеркивает единый подход, общий метод: умножение одного вектора на другой ($\alpha \cdot \rho$) и действие оператора на вектор ($\Phi \cdot \rho$) подчинены общему закону (следы теории кватернионов!). В современных курсах это достигается с помощью исчисления матриц.

Сумму диад Гиббс называет *dyadic binomial, dyadic trinomial*. Впоследствии они получили название *аффинов* (термин предложен Юнгом), поскольку речь идет об аффинных преобразованиях пространства. Затем Гиббс отмечает, что изучение векторной функции приобретает первостепенное значение; он начинает развивать исчисление диад. Обратим внимание на некоторые важные моменты.

Теория линейной векторной функции векторного аргумента Гамильтона развита как метод решения векторных линейных уравнений или как теория обращения линейной функции. Совершенно иная точка зрения у Гиббса: он вводит линейное преобразование пространства: « $r' = \Phi \cdot r$. Можно считать, что это уравнение определяет преобразование точки P пространства, лежащей в конце вектора r , в точку P' , лежащую в конце вектора r' . Начало остается неизменным. Точки в определенной конечной части пространства остаются в конечной же области. Любая точка прямой линии $r = b + xa$ становится точкой линии $r' = \Phi \cdot b + x \Phi \cdot a$. Отсюда следует, что прямые переходят в прямые, а прямые линии, параллельные одной и той же прямой a — в прямые, параллельные прямой $\Phi \cdot a$. Аналогично плоскости переходят в плоскости и свойство параллельности — инвариант» [55, с. 333].

При этом, «если Φ интерпретировать как оператор, определяющий преобразование пространства, то положительные степени Φ соответствуют повторениям преобразований. Отрицательные степени Φ соответствуют обратным преобразованиям. Идемфактор соответствует тождественному преобразованию, т. е. случаю, когда вообще нет никакого преобразования» [55, с. 293].

Гиббсово обозначение оператора тождественного преобразования через I (от Idemfactor) употребляется и в наши дни. В трудах Гиббса характеристическое уравнение называется *уравнением Гамильтона—Кэли*. Современное название предложил Фробениус (1878).

Важно подчеркнуть, что Гиббс писал об эквивалентности теории линейной векторной функции Гамильтона и теории диад, но, с другой стороны, отмечал и родство с теорией матриц: «Аналогия между теорией диадиков и теорией матриц очень тесная. В самом деле, диадик может рассматриваться как матрица третьего порядка и, наоборот, матрица третьего порядка может рассматриваться как диадик. Сложение и умножение матриц и диадиков выполняется по одним и тем же правилам. Обобщение идеи диадика на пространство большего числа измерений, чем три, ведет к кратной алгебре и теории матриц более высокого порядка, чем три» [54, с. 321].

Уилсон свел в таблицу «аналогии между аффинорами и кватернионами», а также проанализировал связи между работами Гиббса и Грассмана.

Интересно, что в первой брошюре (1881) Гиббс еще использует чисто кватернионные технические приемы. Например, он выражает коэффициенты разложения

$$\rho = a\alpha + b\beta + c\gamma$$

с помощью собственных обозначений:

$$a = \frac{\rho \cdot \beta \times \gamma}{\alpha \cdot \beta \times \gamma}, \quad b = \frac{\rho \cdot \gamma \times \alpha}{\alpha \cdot \beta \times \gamma}, \quad c = \frac{\rho \cdot \alpha \times \beta}{\alpha \cdot \beta \times \gamma}.$$

В теории кватернионов аналогичная формула — одна из самых употребительных. Гиббс записывает ее в своей символике, но затем формула бездействует.

Или еще пример: Гиббс (так же как и Хевисайд) рассматривает операцию деления векторов, а именно вектор α и обратный ему α' удовлетворяют соотношению $\alpha \cdot \alpha' = 1$. Поэтому за вектор, обратный вектору α , принимают вектор $\alpha/|\alpha|^2$. Ясно, что это деление, на первый взгляд определенное как в теории кватернионов (с точностью до знака), не играет той роли, что в теории кватернионов, в частности из $\alpha \cdot \beta = a$ нельзя найти α . В векторном анализе Гиббса нет и речи о делении векторного произведения.

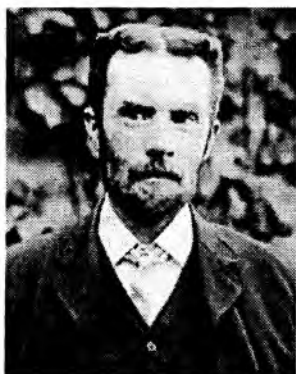
Наконец, Гиббс следует кватернионными путями и при решении некоторых конкретных задач. Вполне возможно, что не существует задачи, которая решалась бы с помощью диад и не была бы доступна кватернионным методам. Но Гиббс развил совершенно новый метод и изменил тем самым «дух исчисления».

Как отмечалось много раз, в книгах Гамильтона можно найти зародыши многих идей, получивших развитие в работах Гиббса по векторному анализу. Возможно, Гиббс именно в таком свете хотел представить свои брошюры, посылая их Тэту. Во всяком случае, кажется нелепым обвинять автора нового изложения в плагиате, а именно так восприняли сторонники теории кватернионов появление векторного анализа.

Глава 6

**«Я верю — система
представляет собой то,
что хочет физик»**

О. Хевисайд



О. Хевисайд

Знаменитый английский ученый Оливер Хевисайд — возможно, самая нестандартная и противоречивая фигура в истории науки. «Ни одно из его открытий не получило того немедленного признания, которое соответствовало бы его ценности» (из некролога). Значение трудов Хевисайда постигалось медленно, с большим опозданием. Одно из свидетельств признания — избрание Хевисайда почетным доктором Геттингенского университета, Хевисайд получил диплом (на латыни):

«Знаменитый муж

Оливер Хевисайд

Англичанин по национальности, проживающий в Ньютон Эббот

Изоощренный в искусстве анализа

Исследователь частиц, называемых электронами

Стойкий, плодовитый, счастливый, хотя ведущий одинокую жизнь

*Однако среди распространяющих учение Максвелла
несомненно первый».*

Именно апостолом учения Максвелла и считал себя Хевисайд.

Оливер Хевисайд был младшим из четырех сыновей художника, гравера по дереву. Один из его братьев стал инженером-электриком-телеграфистом, другой — музыкантом. По материнской линии Хевисайд состоял в родстве с Чарлзом Уитстоном, пионером телеграфии. Этот ученый прославился изобретением многих приборов и аппаратов, в том числе, например, автоматического телеграфного аппарата, передававшего знаки в 5–6 раз скорее, чем при ручной работе (именно этими аппаратами были оснащены подразделения Красной армии в войне 1941–1945 гг.).

Уитстон стал членом Королевского общества в 1836 г. В 1841 г. он предложил соединить подводным телеграфным кабелем Англию и Францию. Линия Дувр-Кале была проложена в 1850–1851 гг. Об этом можно было бы не упоминать, если бы все эти обстоятельства не сыграли роли в жизни Хевисайда. Весьма вероятно, что как раз они определили в значительной степени круг интересов Хевисайда и его брата. Оба они стали работать телеграфистами-операторами. Хевисайд учился только в общеобразовательной школе и в восемнадцать лет поступил на службу. Возможно из-за того, что он начал глохнуть, ему пришлось оставить это место. С 1874 г. он занимается исследованиями в собственной лаборатории. В дальнейшем именно из-за своих научных занятий он отклонял предложения работы с приличными окладами.

Бегло познакомившись с «Трактатом» Максвелла (у букиниста), Хевисайд был охвачен предчувствием великого открытия. Он писал о своем впечатлении: «Это было нечто великое, и еще более великое, и наивеличайшее». Хевисайд приступил к изучению книги, которая оказалась для него слишком трудной. Неудивительно. Человек, уже почти забывший школьную математику (как он сам писал о себе), и не должен был понимать

дифференциальные уравнения в частных производных. «Изучение» максвелловской теории заняло несколько лет. Параллельно с освоением классической математики Хевисайд творил свою собственную. Очень трудно сейчас решить, что именно из современной ему науки знал Хевисайд; он был самоучкой, но определенно известно, что он читал работы Буля и Фурье которыми он восхищался).

Хевисайд не только не имел математических знаний, но и еще не владел, так сказать, языком науки. Поэтому создавая свои собственные методы, специфические для электромагнитной теории, он создавал язык теории. Хевисайд вводил в обращение технические термины и понятия, «крайне загадочные для читателя его книги» (писал в рецензии Фицджеральд). Ныне же без терминов Хевисайда немыслим словарь электродинамики и электротехники.

Возможно, Хевисайд просто не понимал «обыкновенных людей». Как говорил о нем Уитеккер: «Хевисайд, подобно Ньютону или Лапласу или подобно Рамануджану в наши дни, имел дар открывать математические теоремы высокого порядка трудности и сложности при помощи особого рода интуиции, которая обходится без обычного процесса доказательства. Я думаю, именно сознание того, что он владеет таким даром, вызывало у него еще с молодых лет пренебрежение к формальной логике» [5, с. 228].

Хевисайд жил вместе с родителями — сначала в Лондоне, затем в Девоншире: он никогда не был женат («А что было бы с моей работой?»). Эксцентричный, саркастичный, протестующий против любого бюрократизма и условностей, резкий и бескомпромиссный в вопросах науки, Хевисайд жил отшельником, избегая всего, что отрывало бы его от работы. Впрочем, он охотно отвечал на многочисленные письма, со многими учеными был дружен «по переписке» (среди них Фицджеральд, Кельвин, Рэлей, Герц, Лодж, Лармор и др.). Существует легенда, что обращавшиеся к нему с вопросами адресовали письма так: «Неистощимая пещера», и послания с таким адресом доходили до Хевисайда.

В 1891 г. Хевисайд был избран в Королевское общество. Это было свидетельством признания его работ и, конечно, не могло не радовать его. НО. Ему была послана копия Устава, Хевисайд не сделал ничего из того, что требовалась для официального вступления в Общество. Он написал шутливое стихотворение (примерный перевод которого приводит Б. М. Болотовский):

Но чтобы все оформить без изъяна,
Три фунта нам внеси из своего кармана.
Ты в город приезжай, и вот таким путем
Тебя мы к Обществу допустим и причтем.
А если этого ты делать не желаешь,
То к нам не поступай, а поступай, как знаешь!

Те немногие люди, которые близко знали Хевисайда, оставили о нем воспоминания, рисующие привлекательный образ исключительного человека. Видимо, научные статьи заменяли ему и друзей, и общение с людьми — поэтому все, о чем люди говорят «в жизни», Хевисайд «выплескивал» на страницы научных статей. А так как его «общая культура была, без сомнения, исключительна», то и статьи, и письма Хевисайда «не только крайне интересны, но и прекрасны как художественные произведения». Даже не очень расположенные к Хевисайду рецензенты признавали, что его «книга полна интересных отступлений о предметах разного рода... так что вызывает сожаление, что писатели-ученые стремятся превзойти друг друга в тяжеловесной сухой теологии». Приведем строки таких отступлений:

«Печально, но факт, что лишь немногие британцы имеют талант к изучению языков. Это происходит не от лени, а главным образом, от умственной неспособности, которая сочетается с мнением, что одного языка вполне достаточно. Иностранцы, по-видимому, наоборот, имеют от природы способность к языкам до такой степени, что они изобрели большое количество языков и, как правило, владеют сразу несколькими из них. Осмелюсь предложить: пусть они принесут нам, бедным островитянам, пользу своими знаниями, издавая все свои лучшие работы на английском языке. И почему бы не сделать английский язык

международным языком науки? Для иностранцев это было бы все равно, а для народов Великобритании, Ирландии и для других, говорящих на английском языке, это было бы великим благом» [5, с. 165].

А это высказывание может характеризовать отношение Хевисайда к догмам религии: «Любить своих врагов — столь же неправильно, как и ненавидеть друзей». Такой необычный стиль научных работ вызывал и нестандартные отзывы о них: «...восхитительная свежесть пояснений и сила выражений... Эти личные свойства стиля в большой степени увеличивают ценность изданий перепечатки». Или: «Книга ...свободна от погони за строгостью, которая сводится к изобретению трудностей». (Так Фицджеральд отзывается о книге «Работы по электричеству», в которой собраны статьи Хевисайда, написанные до 1891 г.)

Вся жизнь Хевисайда — это борьба физика с издателями, «кембриджскими математиками» и «практиками» — и те, и другие были для него лишь достойными презрения невеждами — независимо от того, благоговели они перед видимостью строгости в науке или не ставили науку ни во что. В его публикациях до конца жизни попадают горькие замечания:

«Опыт научил меня, что если статья отвергнута журналом по неубедительным и общепринятым причинам, то это означает, что статья непривычно оригинальна и хороша. Факт!»

Отношение к работам Хевисайда менялось медленно, он опередил свое время, но постепенно время «догоняло». (И догоняет до сих пор — примеры см. [5, с. 94, 149, 234].) Поддержка немногих, но известных и авторитетных ученых, практика телефонии и телеграфии склонили «общественное мнение» к признанию его гения, хотя пришло оно трагически поздно.

В январе 1925 г. Хевисайд, потеряв сознание, упал с лестницы. Родные решили поместить его в платную больницу. Хевисайд впервые в жизни проехал в автомобиле, впервые в жизни попал в лечебницу. В феврале 1925 г. он скончался.

Таковы внешние события жизни человека, вся жизнь которого — пренебрежение всем внешним. Подлинная жизнь Хевисайда — работа мысли. Когда Хевисайд умер, в некрологах

говорилось о «достойном восхищения примере жизни, целиком посвященной науке, примере, столь редком в истории человечества». В те дни О. Лодж писал:

«Бывает так, что время от времени, мы не знаем, как и откуда появляется гений. Есть опасность, что его должным образом не поймут и не оценят при жизни, отчасти потому, что он не прошел обычную систему образования и поэтому не привлеч внимания современников, как это могло бы быть и бывает на этой стадии, а отчасти потому, что его подход необычен и исключителен, а высказывания носят оригинальный характер и непривычны по стилю. Он также может в большей или меньшей степени опережать свое время, так что блеск и важность его достижений раскрываются лишь со временем... таким человеком был Оливер Хевисайд, математический гений исключительной силы, который заполнял колонки журнала „Electrician“ замечательными, но мало понятными работами, значение которых, однако, было осознано незадолго до его смерти... но практическая важность которых отрицалась телеграфными авторитетами того времени... Без сомнения, Оливер Хевисайд очень сильно ощущал эти обиды и пренебрежение*, и это отражалось в его шутливых и саркастических замечаниях по разным поводам.

...Нет сомнения, что часть трудностей с признанием достижений Хевисайда объясняется особенностями его личности. Он был... человек, склонный к уединению. Он жил один, в значительной бедности, сам готовил себе еду, сам обслуживал себя, у него было плохое здоровье...

...То, что он не смог получить каких-то материальных выгод... заслуживает сожаления: но при существующей системе научного признания или непризнания это было, вероятно, неизбежно. Оказать лично помощь Хевисайду было непростым делом... гордость Хевисайда отбивала охоту делать такие попытки. Его уговорили в конце концов принять правительственную пенсию, обставив это как признание его научных заслуг, чтобы у него и мысли не возникло о благотворительности.

* Кроме того, гонорары были единственными его «заработками».

Я не думаю, что этот человек был несчастлив, хотя одно время он и испытывал горечь непонимания и враждебности тех, кто обладал административной властью... Хевисайд жил независимой замкнутой жизнью, и нет сомнения в том, что постижение тайн природы должно было приносить ему моменты истинного удовлетворения» [5, с. 211–213].

Уже в ранних научных статьях (1873–1876) Хевисайд обосновал практическую возможность так называемой *дуплексной телеграфии* — передачи сообщений одновременно в обоих направлениях вместо поочередной передачи то в одном, то в другом направлении. Тогда это было важным достижением, позволяющим вдвое увеличить объем информации, передаваемой по линии связи.

Независимо от Пойнтинга (несколько позднее его) Хевисайд ввел понятие *потока электромагнитной энергии*, а затем разобрал важные случаи, когда энергия переносится полем. Он предсказал существование *скин-эффекта* (который и был обнаружен через год). Широко известна борьба Хевисайда с математической строгостью ради строгости. Но ему приходилось воевать и с теми, кто утверждал, что математика физикам и инженерам не нужна*. В частности о скин-эффекте он писал:

«С помощью математического подхода было открыто, что когда электрический ток начинает течь по проволоке, он возникает исключительно на поверхности провода, даже на наружной поверхности, и что, следовательно, быстрые колебания тока под действием внешней силы происходят вблизи от поверхности провода и не проникают заметным образом в глубину.

Очень немногие из тех электриков, кто обходится без математики, в состоянии понять этот факт, а возможно, и никто из них не понимает. Многие из них не только не понимают, но и не верят в него» [5, с. 89].

Один из руководящих работников Британского почтового ведомства (У. Присс), будучи неплохим практическим инженером, относился к теории (в частности к теории Хевисайда) как

* В это же время в журнале русского физико-химического общества была опубликована статья «О неуместности математики в физике»!

к чепухе, о чем заявлял во всеуслышание. Поскольку он был влиятельным человеком, статью Хевисайда с критикой взглядов Присса отклонили четыре редакции — не только из опасения выступить против официальной точки зрения, но и из-за боязни возможного судебного преследования — настолько резки были слова Хевисайда. Его статьи исчезли из научных журналов на несколько лет. В редакцию поступили запросы — почему прервана публикация статей Хевисайда, и когда она возобновится. Авторы писем были настолько известными и именитыми, что работы Хевисайда вновь появились.

И все-таки, когда Хевисайд стал вновь публиковаться, он язвительно заметил: «По-видимому, сыграла роль и мысль о том, что официальные взгляды не должны оспариваться или критиковаться...» [5, с. 52].

Проблема передачи сигналов по кабелю в те времена являлась «злостью дня»: был проложен трансатлантический кабель (в 1858 г. — первый, в 1865 г. — второй, и в 1866 г. — третий), хотя Томсон (лорд Кельвин) утверждал, что по его теории телефонная связь возможна лишь на малых расстояниях — не более 50 миль (на больших сигнал «расплывается»). Еще в 1885 г. возможность телефонной связи ставилась под сомнение. Изучая распространение сигнала по проводу, Хевисайд учитывал дополнительные параметры линии — индуктивность и утечку на единицу длины. Он показал, как подобрать параметры кабеля, чтобы сигнал не искажался. Иначе говоря, Хевисайд сформулировал условия связи без искажений. Он утверждал, что при их выполнении будет возможна телефонная связь через Атлантический океан. В 1889 г. Кельвин признал правоту Хевисайда. Они обменялись письмами. Кельвин писал: «Я думаю, не все понимают, с какой полнотой Вы применили Ваши результаты к практическим вопросам и, кроме того, до сих пор Ваши результаты не столь широко известны. Однако среди тех, кто интересуется вопросами науки об электричестве, сравнительно немногие могут читать и понимать такие работы, как Ваши, и это, без сомнения, является главной причиной, по которой Ваши работы гораздо менее известны и признаны, чем они того заслуживают» [5, с. 56].

Еще в одном случае математические методы Хевисайда позволили решить трудную проблему: Томсон пытался определить возраст Земли по ее остыванию. Результат оказался совершенно неприемлемым для теории эволюции: от 10 до 50 миллионов лет, тогда как установлено, что только время господства ящеров на Земле длилось 100 миллионов лет, а время их вымирания — 10 миллионов лет. Хевисайд решил задачу в предположении, что следующие друг за другом слои Земли имеют различную теплопроводность. Он признавался, что испытал большое удовольствие от демонстрации мощи методов операционного исчисления.

После работ Герца возникла идея радиосвязи. Труды Хевисайда способствовали ее развитию. В 1901 г. была осуществлена радиосвязь между Европой и Америкой. В переписке Хевисайда с Фицджеральдом обсуждался механизм распространения радиоволн: Фицджеральд считал, что дифракция радиоволн обеспечивает радиосвязь между разными полушариями. Хевисайд же предположил, что над Землей существует слой, отражающий радиоволны, благодаря чему возможна радиосвязь между любыми двумя точками на Земле. Отголоски истории с Приссом есть и в статьях этого времени: «...не так давно электромагнитных волн нигде не было, а теперь они есть повсюду, даже в почтовом ведомстве» [5, с. 90]. Существование так называемого *слоя Хевисайда* (который в настоящее время называют *ионосферой*) было экспериментально подтверждено через 22 года после того, как высказана гипотеза. Неизвестно, узнал ли об этом Хевисайд — в декабре 1924 г. он был уже тяжело болен.

«...Главной целью Хевисайда было построение объединенной теории поля, в которой согласованным образом рассматривались электромагнетизм, механическая масса (инерция) и тяготение. При этом Хевисайд брал за основу теорию электромагнитного поля» [5, с. 221]. Как далеко продвинулся Хевисайд в решении этой грандиозной задачи — не известно. Рукопись четвертого тома «Электромагнитной теории», подготовленная к печати, исчезла после смерти Хевисайда (его дом был ограблен). К настоящему времени найдены лишь черновики, неко-

торые заметки и разрозненные бумаги, по которым пытаются восстановить содержание четвертого тома. Время от времени возрождаются надежды обнаружить рукопись книги.

Почти все работы Хевисайда, опубликованные до 1891 г., были собраны и переизданы в двухтомном труде «Electrical Papers» («Работы по электричеству»). Так как статьи перепечатаны практически без изменений (лишь с некоторыми исправлениями или дополнениями), то в них есть повторения — иногда Хевисайд предпосылал статье краткое изложение предыдущей. Книга поражает богатством идей и результатов. Именно о «Работах по электричеству» Фицджеральд говорил: «С того времени, как начал писать Хевисайд, состояние всей проблемы электромагнетизма изменилось, благодаря его работам. Теперь уже ни одно введение в этот предмет не будет законченным, если в нем основные воззрения не будут близки к тем, которые высказал Хевисайд» [5, с. 84]. Тем не менее большая часть тиража была уничтожена, поскольку книга расходилась с трудом, «складские помещения дóроги» (писал с горечью Хевисайд).

Последующие статьи Хевисайда, но уже с некоторой обработкой (были специально написаны связывающие и поясняющие разделы), изданы в виде трехтомной книги «Electromagnetic Theory» («Электромагнитная теория», 1893 г. — т. 1; 1899 г. — т. 2; 1912 г. — т. 3). Не совсем справедлива оценка этой работы самим автором: «Я хочу сказать, что практически вся моя основная работа выполнена до 1887 г. и содержится в моей книге „Работы по электричеству“. Книга „Электромагнитная теория“ — это просто развитие предыдущего, необходимое прежде всего для того, чтобы пробить дубовые головы математиков из Королевского общества» [5, с. 208].

Во втором томе «Электромагнитной теории» Хевисайд более подробно, чем раньше, изложил свои математические методы.

* * *

В первые годы работы Хевисайду пришлось доказывать необходимость векторных методов: многие ученые и после его объяснений больше принимали на веру его результаты, чем по-

нимали их, а некоторые и вовсе не верили. Хевисайд вновь и вновь убеждал: «Электромагнитная теория кишит векторами... так как мы живем в мире векторов, то векторная алгебра (или язык векторов) положительно необходима» [62, с. 75]. А автор рецензии на «Электромагнитную теорию» (Суинберн), кажется, не вполне был уверен в реальности векторных величин (!): «Идея направленного тока, бегущего по проволоке, позаимствована из гидродинамики и, возможно, мы можем так определить электрические и магнитные величины и так думать о них, но ведь ничто не соответствует произведениям или частным векторов...»

Еще при жизни Хевисайда векторные методы вошли в науку «вопреки пренебрежению эдинбургской школы насмешников (один из которых сказал, что некоторые из моих работ представляют „позор для Королевского общества“, к моему большому удовольствию)...» [5, с. 208].

Но собственно о векторном анализе речь пойдет дальше, а сейчас поговорим о других математических идеях Хевисайда, вызывавших ожесточенные споры при его жизни и не получивших однозначной оценки до сих пор.

Ему пришлось долго воевать за право использовать свои эффективные методы, а так как у него не было потребности в математически строгом обосновании метода, то и аргументы его были «прагматичны»: «Те, кому хочется получить более формальное и логически обусловленное решение, могут искать его где угодно и найти его, если смогут, или же просто могут получить все сами» [5, с. 287].

Хевисайд развил собственный метод решения дифференциальных уравнений, который получил название *операционного исчисления*. Он пользовался этим методом с 1881 г., теоремой разложения — с 1888 г. Странно было бы, если в необозримом научном наследии Эйлера не оказалось бы попыток ввести дифференциалы дробных порядков, преобразования Лапласа... Оно действительно было известно со времен Эйлера. «Но лишь Хевисайду удалось создать такую систему, которая постоянно совершенствуясь, смогла развиваться в исчисление, ставшее рабочим

инструментом физиков и инженеров самых различных специальностей» [3, с. 20].

Хевисайд обращался с операторами p и $p^{-1} \left(\frac{d}{dt} \text{ и } \int_0^t \dots dt \right)$ как с обычными числами; он рассматривал $\sqrt{p}$ и называл его «оператор дробного дифференцирования», использовал ряды по степеням p (естественно, даже не задумываясь о сходимости такого ряда)... Работы неизменно получали отрицательные отзывы рецензентов-математиков, что вызывало очередные саркастические замечания Хевисайда о «кембриджских математиках»: «Действительно их <операторов> использование часто ведет к большим упрощениям и избавляет от необходимости проводить сложные вычисления определенных интегралов. Но при этом строгая логика дела не ясна! Ну и что из того? Откажусь ли я от обеда потому, что не понимаю полностью процесс приготовления пищи? Нет, если удовлетворен результатом. Подобным образом и физик может применять нестрогие процессы с удовлетворением и пользой, если он, проведя проверки, убеждается в точности своих результатов».

Первые попытки дать операционному исчислению строгое математическое обоснование были предприняты Бромвичем и Карсоном.

Английский математик Томас Джон Бромвич использовал ТФКП для обоснования методов Хевисайда. Он писал Хевисайду (в 1915 г.): «...мой метод начинается с комплексных интегралов. Я боюсь, что это звучит устрашающе, но на самом деле это очень просто... Боюсь, что физики никогда не будут пытаться применить мой метод; но надеюсь, что он даст им больше уверенности при использовании Вашего метода, если они будут знать, что существует независимый метод получения тех же формул» [5, с. 193]. И через несколько лет (1919 г.): «...я увидел, что охотнее работаю с операторами,



Дж. Карсон

чем с комплексным интегрированием... Я все еще считаю, что комплексные интегралы полезны для того, чтобы убедить чистейшего из чистых математиков в полной обоснованности операционного метода. Но рабочим инструментом во всех такого рода делах является, я уверен, именно операторный метод» [5, с. 195]. Безусловно, это признание должно было доставить удовольствие Хевисайду.

Почти в это же время (1915–1916) немецкий инженер-электрик Вагнер доказал сходными рассуждениями справедливость формул Хевисайда (статья «Über eine Formel von Heaviside zur Berechnung von Einschaltvorgängen»).

Американский математик Джон Карсон развил свой вариант хевисайдова исчисления в серии статей (начиная с 1917 г.); подытожившая их книга «Теория электрических цепей и операционное исчисление» вышла в 1926 г. Карсон (по совету Бейтмена) привлек преобразование Лапласа; если определять изображение формулой

$$F(p) = p \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt,$$

то получается полное соответствие с формулами Хевисайда.

Э. Уиттеккер высоко оценивал операционное исчисление Хевисайда: «Оглядываясь... мы теперь должны поставить операционное исчисление в один ряд с открытием автоморфных функций Пуанкаре и открытием тензорного исчисления Риччи. Это три наиболее важных математических достижений последней четверти XIX века. Приложение, развитие и обоснование операционного исчисления составляют значительную часть математической деятельности сегодняшнего дня» [63, с. 277].

Можно еще добавить, что первым в курс математики для инженеров ввел элементы операционного исчисления проф. Дж. Перри. Пожалуй, это естественный поступок для автора книги «Пренебрежение к науке в Англии» («England's Neglect of Science», 1901). А первыми опубликованными курсами были книги Карсона (1926), Джеффриса (1927), Берга (1929). Э. Д. Берг (США),

работая над учебником, несколько раз обращался за советами к Хевисайду, и тот охотно давал разъяснения.

Для того чтобы описывать и исследовать процессы включения, Хевисайд уже в самых первых работах ввел единичную функцию $1(t)$, равную нулю при $t < 0$ и равную единице при $t > 0$. Эту функцию теперь называют *функцией Хевисайда* и обозначают первой буквой его фамилии $H(t)$.

Другая важная функция, которую ввел и постоянно использовал Хевисайд, — *импульсная* (по его терминологии). Импульсная функция равна нулю всюду, кроме начала координат, где она обращается в бесконечность таким образом, что интеграл от нее по отрезку, содержащему $x = 0$, равен единице. С помощью этой функции Хевисайд описывал импульсное воздействие на систему: силы действуют лишь в один момент, а интеграл от силы по времени, т. е. переданный импульс, отличен от нуля.

Импульсная функция определяет также плотность точечного источника. Хевисайд имел несколько представлений этой функции, например, разложение в ряд Фурье:

$$\delta(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos nx, \quad -\pi < x < \pi.$$

Хевисайд считал импульсную функцию самой обыкновенной, а для «кембриджских математиков» она была «красной тряпкой». Когда Дирак (в 1926 г.) заново ввел дельта-функцию (как он ее назвал), математики так же яростно протестовали.

Без созданных Хевисайдом методов немыслима его электромагнитная теория. Но методы имели еще и общенаучное значение: «...алгебра операторов и использование функции Хевисайда $1(t)$ и импульсной функции впоследствии облегчили развитие математического формализма квантовой теории» [5, с. 146].

В предисловии к «Работам по электричеству» Хевисайд писал, что его труд посвящен в основном объяснению и развитию теории Максвелла и его математических методов.

Тот факт, что Хевисайд реализовал идеи Максвелла о применении векторного исчисления в теории электричества и магнетизма, мало известен. Так, в юбилейном томе, выпущенном

к столетию Хевисайда, его заслуги в «чистой математике» отнесены только к операционному исчислению. Хевисайд же считал и создание векторного анализа исполнением предназначений Максвелла.

Первые работы Хевисайда по стилю и методам такие же, как труд Максвелла, т. е. «кватернионные». Изменения, внесенные Хевисайдом, привели к созданию исчисления, принципиально отличного от теории кватернионов, хотя вначале эти изменения воспринимались только как некоторая модификация обозначений и определений. Труды Хевисайда демонстрировали необходимость векторных методов в физике, в частности в электромагнитной теории. Его статьи невозможно прочесть, не овладев векторным анализом. А Хевисайд все снова и снова повторял, что векторный метод — не только удобный, компактный вид записи соотношений, но и единственная форма для выражения зависимостей между величинами, фигурирующими в электромагнитной теории.

Хевисайд развил свою векторную систему в 1882–1885 гг. независимо от Гиббса. В 1888 г. он получил от Гиббса экземпляр «Элементов векторного анализа» и узнал, что имеет единомышленника. После этого Хевисайд внес некоторые изменения в теорию, самое значительное — трактовка линейных операторов.

В первых статьях Хевисайда, как правило, содержатся решения конкретных задач, что и отражено в названиях: «Сравнение электродвижущих сил при постоянных напряжениях», «Чувствительность мостика Уитстона», «О дифференциальном гальванометре», «О телеграфной сигнализации с помощью конденсаторов» и т. д. Еще раз отметим, что из-за четко выраженных прикладных целей Хевисайд не уделял внимания строгому математическому обоснованию своих исследований, для него единственным критерием ценности математического аппарата была способность этого аппарата решать задачи, и при этом решать быстро, легко и наглядно. Таким «утилитарным» подходом к математике объясняется и позиция Хевисайда в дискуссии против теории кватернионов: «Проф. Тэт прав? или осквернители <чистоты теории> правы? Могут быть разные мнения. Мое собствен-

ное — ответ зависит от точки зрения. Если мы оставим в стороне практические приложения к физике и взглянем на кватернионы целиком с кватернионной точки зрения, то проф. Тэт совершенно прав, и теория кватернионов доставляет единственно простой и естественный путь исследования кватернионов. Обратите внимание на подчеркивание» [61, с. 76]. Эти слова достаточно красноречиво говорят о том, что Хевисайд знал о другой точке зрения на кватернионы, кроме своей собственной. Но он не хотел понимать и разделять ее, не хотел видеть другой цели кватернионов, кроме служения физике в виде векторного исчисления.

История построения векторной системы Хевисайдом известна от него самого. Познакомившись с книгой Максвелла, он принял векторное исчисление в той единственной форме, в какой оно тогда существовало, — в виде части теории кватернионов: «Замечательная система математики, названная кватернионами, была изобретена сэром Гамильтоном, она может быть охарактеризована как исчисление векторов» [62, с. 207]. В этом, кажется, единственном положительном отзыве Хевисайда о кватернионах (относящемся к 1882 г.) он, так же как и Максвелл в свое время, сужает теорию кватернионов до «доктрины векторов».

Хевисайд пошел по пути, намеченному Максвеллом: он взял из теории кватернионов векторы и ту ее часть, которая содержит операции над векторами. Как он писал, векторное исчисление стало для него вопросом жизни около 1882 г. В ранних статьях Хевисайда еще видна радость открытия векторного исчисления, хотя бы и кватернионного: «Это замечательный факт (открытый проф. Тэтом), что эти три операции — ротор, дивергенция и пространственное дифференцирование — в действительности представляют собой три различные формы одного и того же оператора, а результат действия варьируется в зависимости от исследуемой функции» — как далеко это «личное» отношение к оператору ∇ от «строгого» изложения! [10, т. 1, с. 268]. Или: «Существуют три замечательные теоремы относительно ∇ , а именно:

$$P_2 - P_1 = \int_1^2 \nabla P \, ds,$$

$$\int A ds = \iint V \nabla A dS,$$

$$\iint C ds = \iiint \nabla C dv».$$

Итак, сначала Хевисайд пользовался языком кватернионов, принимал правила

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

и интерпретировал произведения ортов как вращения; он ввел обратный вектор; применяя оператор ∇ к векторной функции, получал ротор и конвергенцию и т. д. Даже в очерке по векторной алгебре и векторному анализу (1892) есть еще следы кватернионной теории (например, рассматриваются те же задачи, что в «Элементарном трактате» Тэта). Однако при переиздании своих первых статей Хевисайд сделал сноску: «Существует векторная алгебра без кватернионов».

Отметим важный факт: в первой же статье, в которой используются векторные методы (это были методы теории кватернионов), Хевисайд провозглашает неизбежную необходимость таких методов в физике и одновременно объясняет, почему нельзя использовать кватернионы: «Против кватернионов... тот факт, что оперирование с ними встречает значительно большие трудности, чем соответствующие обычные вычисления... Пойдем на компромисс; посмотрим на привычные, но сложные скалярные уравнения и увидим за ними одно-единственное векторное, выражающее реальную вещь» [10, т. 1, с. 207]. Таким образом, поиски более «удачного» варианта векторного исчисления начались необычайно рано (так же как и ехидство — мнимостям кватернионов противопоставляется «реальная» вещь).

В 1885 г. Хевисайд опубликовал общее изложение своей векторной системы «On the Electro Magnetic Wave Surface» — это первая публикация векторного анализа. Уже в этом варианте теории Хевисайд обращает внимание читателей на «...дело большой практической важности — обозначения должны гармонизировать с формулами декартовой математики так, чтобы можно было легко без изменений обозначений перейти от одного к другому,

т. е. от векторов к координатам и наоборот, как это часто требуется в исследованиях. Этого, мне кажется, не достигают обозначения проф. Тэта с их многочисленными буквенными префиксами и особенно со знаком „минус“ перед каждым скалярным произведением; отрицательный знак является причиной величайшего неудобства при таких переходах» [10, т. 1, с. 3].

Хевисайд предлагает свою векторную систему как некоторое видоизменение теории кватернионов, удобное для работы физика, согласованное с «декартовой математикой» именно благодаря рациональным, обдуманым обозначениям (это он будет повторять всю жизнь). Хевисайд всегда подчеркивал, что существенной чертой его системы являются обозначения и язык.

Из терминологии теории кватернионов он позаимствовал минимум: слова *скаляр*, *вектор*, *тензор вектора* (иногда встречается и «длина»), *curl*, *slope*, *convergence* (очень скоро заменив это понятие на дивергенцию), *набла* (это название он считал неудачным и «смехотворным», но ведь оно и вводилось как шутка). Он не использовал термины *компланарность* и *коллинеарность*. Хевисайд разделил полное кватернионное произведение векторов $\alpha\beta = S.\alpha\beta + V.\alpha\beta$ на два отдельных произведения, и скалярную часть ($S.\alpha\beta$) назвал скалярным произведением, а векторную часть ($V.\alpha\beta$) — векторным произведением векторов, сохранив эти обозначения. Названия введены уже в 1885 г. Формулы с декартовыми координатами он называл «полудекартово разложение» или «полудекартово представление».

Хевисайд отказался от греческих и готических букв — он был убежден, что одного употребления их достаточно, чтобы вызвать предубеждение против векторов. В 1886 г. он предложил жирную печать для обозначения векторов и считал очень удачной мысль — обозначить вектор жирной буквой *a*, длину вектора — той же буквой *a*, а проекции вектора на оси координат через a_x, a_y, a_z .

В статье Хевисайда 1892 г. появился термин *орт*. Относительно его смысла высказано несколько гипотез. Наиболее вероятной кажется та, согласно которой *ort* — сокращение слова *orientation*.

Хевисайд внес два существенных изменения в теорию кватернионов:

1. Принял по определению $i^2 = j^2 = k^2 = +1$.
2. Определением ввел два вида произведений векторов.

В полемике со сторонниками теории кватернионов оба эти положения часто характеризовались (обеими сторонами) как изменения в обозначениях. Эти изменения Хевисайд обосновывал и оправдывал так: «Я чрезвычайно тщательно выбрал обозначения, чтобы как можно гармоничнее связать их с обычными математическими идеями, процессами и обозначениями... В общей алгебре существует только один вид произведения пары величин, скажем, F и v , которое обозначается через Fv . В векторной алгебре имеются два вида произведений. Одно из них близко напоминает обычное произведение, тогда как другое — само будучи вектором — в корне отличается от обычного. Соответственно этому, чтобы было согласие с общей алгеброй, я обозначил скалярное произведение через Fv , оно вырождается в Fv , если векторы имеют одно и то же направление...» [61, с. 384].

Неприятие «математического формализма» у Хевисайда доходило до того, что он не давал «формальных определений» (впрочем и в физике он действовал так же) — где-то мимоходом он поясняет (несколько раз): «...вектор, т. е. направленная величина...» В «Работах по электричеству» он ввел скалярное и векторное произведения формулами для вычислений: «Мы определим $\mathbf{A}\mathbf{B}$ таким образом:

$$A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$$

и назовем скалярным произведением векторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$... Мы определим $\mathbf{VA}\mathbf{B}$ таким образом:

$$\mathbf{i}(A_2B_3 - B_2A_3) + \mathbf{j}(A_3B_1 - A_1B_3) + \mathbf{k}(A_1B_2 - A_2B_1)$$

и назовем его векторным произведением векторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ » [10, т. 2, с. 4].

В «Электромагнитной теории» Хевисайд приводит «современные» определения; в отличие от Гиббса он связывает направление векторного произведения с ориентацией системы координат.

Эти два изменения, внесенные Хевисайдом в векторное исчисление теории кватернионов, и являются тем, что отличает его исчисление от исчисления Максвелла. В разгар борьбы с кватернионистами Хевисайд писал: «Однако вопрос не заключается полностью в обозначениях. Я отбросил кватернионную основу векторного анализа... Я могу уверенно рекомендовать модификацию, сделанную мной, как практически работающую систему. Она имеет много преимуществ и не последнее из них — тот факт, что кватернион вовсе в ней не появляется, а также то, что приняты обозначения, гармонично согласованные с декартовой математикой» [61, с. 383].

В ноябре 1891 г. Хевисайд начал публиковать в журнале «Electrician» серию статей по векторному анализу (их было 22), которые впоследствии составили главу «Элементы векторной алгебры и векторного анализа» в книге «Электромагнитная теория». В них рассмотрены многочисленные применения векторного исчисления к задачам электричества и магнетизма. Как только Хевисайд вводит понятие, он сразу же рассматривает конкретную задачу, в которой это понятие используется, — и все изложение идет на фоне страстной проповеди того, что «векторы точно приспособлены, чтобы выражать физические соотношения», чего не могут сделать «кембриджские математики с их вызывающим огорчением и надрывающим душу стилем работы» (слова из его научной статьи!):

«...Алгебраическая или аналитическая геометрия в обычной декартовой форме, хотя и имеет дело с векторами, не является векторной алгеброй. На самом деле она есть сведение к скалярной алгебре путем разложения каждого вектора на три ортогональные составляющие, с которыми манипулируют как со скалярами.

Аналогично и в обычной трактовке физических векторов сами векторы упраздняются (avoidance) разложением их на составляющие. Что это глубоко искусственный процесс — очевидно, но часто это удобно. Еще чаще, однако, наоборот...

Если мы работаем непосредственно с векторами, мы фиксируем наше внимание на них и на их взаимных соотношениях;

и эти соотношения обычно проявляются в четкой компактной и выразительной форме, внутренний смысл которой очевиден с первого взгляда. Но вот та же самая связь в декартовой форме. Какая разница! Формула в одну строчку, выраженная несколькими буквами и символами, читаемая сходу, иногда разрастается и занимает целую страницу!... Опять-таки в декартовом методе мы уходим от физических соотношений, что так желательно иметь в виду, развертывая математические упражнения над компонентами. Математика становится слепой (или имеет тенденцию к этому).

Векторная алгебра есть естественный язык векторов, и никто, изучивший ее (не слишком поздно в жизни, однако), не вернется от жизненности векторов к громоздкой мертвечине декартовой системы» [61, с. 34].

Повторяющиеся выражения «декартова геометрия», «декартова система», конечно, означают «координатную геометрию, систему, запись, формулу и т. д.».

Напомним, что «Элементы векторного анализа» Гиббса не были опубликованы, а распространялись «частным образом», поэтому статьи Хевисайда — первая публикация векторного анализа. Хевисайд внес некоторые изменения в свою векторную систему после знакомства с брошюрами Гиббса. Он упомянул работу Гиббса и заодно отметил, что больше всего ему не нравились (у Гиббса) обозначения — точка и крестик — для произведений и употребление греческих букв. «Это тяжело для чтения и состоит в серьезном конфликте с общим использованием точки и креста в алгебре... Я использую точки в общем их значении: либо как знак умножения, либо как разделитель». Хевисайд категорически не хотел видеть достоинств кватернионного символизма, его обозначений, из которых он «смастерил» свои.

Опыт показывает, что обозначение векторов греческими буквами — исключительно удобно, с одного взгляда обнаруживается вектор — в печатном ли, в рукописном ли тексте. Что до обозначений Гиббса — совершенно непонятно, где «конфликт с общим использованием точки и креста в алгебре».

Когда вышла книга Гиббса—Уилсона, Хевисайд протестовал против «излишней» математической строгости. Он не видел необходимости в определении линейного преобразования векторов, и его раздражала «псевдонаучность» определения; доказательство свойства

$$\Phi(nr) = n\Phi(r)$$

он приводит как шокирующий пример: «...меня могут спросить: „Вы хотите сказать, что это доказательство неверно?“ Не знаю. Думаю, что оно верно. Я бы не стал его обсуждать. „Тогда как бы Вы доказали это?“ Конечно, простой проверкой. Напишите любое выражение для $\Phi(r)$, тогда получите... сразу и без каких-либо дополнительных доводов» [61, с. 138].

Общая же характеристика, которую он дал «Элементам векторного анализа»: «Это не кватернионное исследование, а маленькое оригинальное исследование по векторному анализу, хотя слишком концентрированное и слишком продвинутое для преподавательских целей. Именно „в преподавательских целях“ и начал Хевисайд свои публикации: „Максвелл в своем великом ‘Treatise on Electricity and Magnetism’ обратил внимание на пригодность векторных методов для его предмета... Распространение векторного анализа, по-моему, несомненно задержано отсутствием достаточно элементарных работ по этому предмету, с установлением принципов... и с удобными обозначениями. Читатель труда Максвелла, который хочет научиться работать с векторами, должен для этого обратиться либо к тяжелым трудам Гамильтона, либо к ‘Treatise’ Тэта. О первом не может быть и речи для первоначального ознакомления, а последний чрезмерно труден, хотя и охарактеризован как *elementary treatise*, это не то же, что *treatise on the elements*. Трудности вырастают в значительной степени из кватернионной основы“» [61, с. 35].

В статьях Хевисайда не повторяются те определения векторного поля, электрического поля, которые дал Максвелл. Нет и самих терминов. Обойтись без этих понятий в электромагнитной теории, конечно, просто невозможно; для их наименования Хевисайд употребляет слова *среда*, *эфир*, *скалярная функция положения или функция от x, y, z* . Из некоторых его высказы-

ваний видно, что он считает электромагнитную теорию, по существу, теорией векторного поля: «Замечательные экспериментальные работы... открыли новую эру в развитии теории эфира Максвелла—Фарадея, рассматриваемого как первоначальная среда для электрических явлений — электричества, магнетизма и электромагнетизма» [62, т. II, с. 530].

В отличие от Гиббса, Хевисайд вводит в теорию «гамильтонов вектор

$$\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z},$$

который появляется во всех исследованиях по математической физике... трактуемых векторно» [61, с. 45]. Хевисайд записал его в виде

$$\nabla = i \nabla_1 + j \nabla_2 + k \nabla_3$$

и в дальнейшем отдавал предпочтение именно такой записи. «Вторая форма, будучи просто эквивалентна первой, часто более удобна и легка для использования. Мы видим, что гамильтонов вектор есть некоторый фиктивный вектор, так как длины

$$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$$

его компонент — не величины, а дифференциаторы. Поскольку, однако, эти дифференциаторы скалярны — не скалярные величины, а скалярные операторы, не имеющие ничего векторного, то гамильтониан, благодаря наличию i, j, k , ведет себя подобно любому другому вектору...» [61, с. 45].

Затем следуют формальные правила оперирования с ∇ и очень четкое изложение свойств градиента ($\nabla P = \text{slope of } P$), дивергенции и ротора. Далее приведены формулы

$$\text{div } D = \nabla D = \nabla_1 D_1 + \nabla_2 D_2 + \nabla_3 D_3$$

и

$$\begin{aligned} \text{curl } E &= \nabla \nabla E = \\ &= i(\nabla_2 E_3 - \nabla_3 E_2) + j(\nabla_3 E_1 - \nabla_1 E_3) + k(\nabla_1 E_2 - \nabla_2 E_1). \end{aligned}$$

Нужно отметить, что это определение ротора, очевидно повторяющее определения Максвелла и Гиббса, появилось у Хевисайда лишь в 1892 г. Нельзя объяснить этот факт только знакомством с брошюрами Гиббса, поскольку определение хорошо известно по «Трактату» Максвелла, но, возможно, ясность построения теории у Гиббса не могла не оказать влияния. Для сравнения приведем раннее определение ротора у Хевисайда (1882): «Если один вектор или направленная величина, $\mathbf{V}$, связан с другим вектором, $\mathbf{C}$, так что криволинейный интеграл от $\mathbf{V}$ вдоль (round) любой замкнутой кривой равен интегралу от $\mathbf{C}$ через (through) кривую, то вектор $\mathbf{C}$ называется *curl* вектора $\mathbf{V}$. Термин *curl* предложен Максвеллом» [62, т. 1, с. 228]. «Интеграл через кривую» означает, очевидно, поверхностный интеграл по поверхности, натянутой на кривую. Именно это определение стало основой (или было вновь изобретено) для определений векторного анализа начала XX в., не зависящих от системы координат. Действительно, приведенное определение означает, что векторы связаны зависимостью

$$\int_L B ds = \iint_S C d\sigma.$$

Наконец, о математическом стиле изложения Хевисайда. Сразу же за определением (а иногда и до определения) он приводит физические иллюстрации понятий и рассматривает задачи. Например, непосредственно после введения оператора ∇ идут параграфы «§ 130. Пять примеров операции ∇ в преобразовании поверхностного интеграла к объемному», «§ 131. Пять примеров операции ∇ в преобразовании криволинейного интеграла к поверхностному».

Другой пример — Хевисайд вводит (впервые!) в рассмотренные линейные операторы следующим образом: «*Линейные векторные операторы*. Если $\mathbf{H}$ — магнитная сила в точке, $\mathbf{B}$ — индукция, $\mathbf{E}$ — электрическая сила и $\mathbf{D}$ — смещение (все эти величины — векторные), то уравнения

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad \text{и} \quad \mathbf{D} = \frac{c\mathbf{E}}{4\pi}$$

выражают отношение **B** к **H** и **D** к **E** в диэлектрической среде... Мы не будем изменять форму вышеприведенных уравнений в случае неизотропности, когда μ и ϵ превращаются в линейные операторы. Тогда

$$\mathbf{B}_1 = \mu_{11}\mathbf{H}_1 + \mu_{12}\mathbf{H}_2 + \mu_{13}\mathbf{H}_3,$$

$$\mathbf{B}_2 = \mu_{21}\mathbf{H}_1 + \mu_{22}\mathbf{H}_2 + \mu_{23}\mathbf{H}_3,$$

$$\mathbf{B}_3 = \mu_{31}\mathbf{H}_1 + \mu_{32}\mathbf{H}_2 + \mu_{33}\mathbf{H}_3 \quad [61, \text{с. 71}].$$

Сравнения «декартова и векторного анализа», «векторного и кватернионного анализа» вынесены в отдельный параграф, хотя, по существу, этому посвящена вся глава работы Хевисайда, а не только один параграф. В заключение он пишет: «Я надеюсь, что глава, которую я заканчиваю, может служить временной мерой до тех пор, пока не будут написаны регулярные векторные курсы для физиков, основанные на векторной трактовке векторов» [61, с. 77]. Эти статьи Хевисайда написаны в разгар борьбы со сторонниками теории кватернионов. Они представляют собой уникальное явление в математической и физической литературе. Для характеристики стиля Хевисайда, далекого от академического, автор рецензии Суинберн нашел также нестандартные слова: «Работа щетинится юмором типа, который он изобрел». Основной объект сарказма — кватернионы:

«Проф. Тэт... сообщает физику, что это как раз то, что он хочет для своих физических целей. Ничуть не бывало... Физики с большим упорством старательно ничего не делают с кватернионами...

Я верю, что система, которую я изложил, представляет собой то, что хочет физик, по крайней мере, то, с чего надо начать... Как раз это я и излагал с 1882 г., хотя скорее в примерах, чем в заповедях» [61, с. 77].

Глава 7

«Электромагнетизм кишит векторами»

О. Хевисайд

Итак, первая самостоятельная (а не часть теории кватернионов) векторная система появилась в трудах Максвелла, он увидел, что теорию Фарадея, оперирующую с направленными величинами, можно совершенно естественно изложить на языке векторов. Вследствие этого история признания векторного исчисления оказалась неразрывно связанной с историей признания максвелловской теории электричества и магнетизма. Борьба, сопровождавшая признание теории Максвелла, хорошо известна, но в обширной историко-научной литературе нет ни одной фразы о том, что в этой борьбе решалась и судьба векторного исчисления.

С некоторой натяжкой к таким замечаниям можно отнести: «...подробное изложение этой теории, которое трудно было бы дать, а может быть, и трудно понять без математических символов. Вероятно, в этом обстоятельстве и кроется причина того, что максвелловская теория до сих пор еще <1881> так мало распространена среди ученых» [11, с. 14]. Или: «Из этого пестрого собрания гипотез отнюдь не следовало ясных выводов. Для того чтобы их сделать, необходимо было обратиться к сложным расчетам, к разложению отдельных сил на их различно направленные компоненты и т. д. Так область термодинамики

превратилась в то время в бездорожную пустыню» [12, с. 299]. Разложение по различным направлениям не казалось сложным в аналитической механике, но будучи связанным с векторным исчислением, превращало электродинамику в «бездорожную пустыню»! И это пишет Герц, сторонник теории Максвелла!

Теория, развитая Максвеллом, была встречена с недоверием и пренебрежением, потому что она «требовала полного изменения ранее существовавших представлений» (Гельмгольц). Ко времени создания «Трактата» Максвелла в физике не было единой, общепризнанной теории, объясняющей явления электричества и магнетизма.

Пожалуй, самой распространенной была теория Вильгельма Вебера, согласно которой есть две (положительная и отрицательная) невесомые жидкости, которые, смешиваясь, нейтрализуют друг друга; между ними существует дальное действие, т. е. мгновенная передача действия (притяжения или отталкивания) одного тока на другой; силы зависят от расстояния, а также от относительных скоростей и ускорений. Эта теория была доведена до высокой степени совершенства Вебером, Ф. Нейманом и др.

Другая теория родилась в Англии. Фарадей считал невыносимым прямые и непосредственные взаимодействия между двумя телами, разделенными пространством, при которых не происходит никакого изменения в промежуточной среде. Больше

того, он *видел* своими глазами, как среда участвует в этих взаимодействиях, он видел, как опилки располагаются по силовым линиям (понятия о которых тогда не было). Понятие *близкодействия*, нашедшее свое выражение в силовых линиях поля, было основным, принципиальным в теории Фарадея, и его невозможно согласовать с теорией Вебера.

Максвелл с большим почтением относился к Фарадею: «После почти полувековой работы... мы можем сказать, что, хотя практические применения открытия



М. Фарадей

Фарадея возросли и возрастают по количеству и по значению с каждым годом, не было найдено ни одного исключения из формулировки... законов, данной Фарадеем, не прибавлен ни один новый закон, и его первоначальная формулировка и по сей день остается единственной, утверждающей не более того, что может быть проверено опытом, и единственной, при помощи которой теория этого явления может быть выражена строго и численно точно, оставаясь в то же время в рамках элементарных методов изложения» [30, с. 210].

По-видимому, Максвелл считал векторные методы элементарными и наглядными: «Эта отрасль математики... станет, может быть, под каким-нибудь новым именем могущественным методом сообщения истинно научных знаний лицам, лишенным вычислительного духа» [30, с. 9]. Позднее Хевисайд утверждал приблизительно то же самое. Он был убежден, что человек, не образованный математически и не привыкший к манипуляциям с тремя проекциями на координатные оси, естественно мыслит векторами.

Эренфест писал о роли механических моделей Максвелла: «От Фарадея перенял Максвелл стремление рассматривать электромагнитные явления как возмущения и объяснять их, исходя из того, что они имеют место не только в телах, но и в разделяющем их пространстве. Максвелл создал очень детализированную модель структуры эфира. Эта модель, по его представлениям, включала в себя наполненные жидкостью ячейки, передающие друг другу вращательное движение с помощью расположенных между ними фрикционных роликов. Вращение ячеек соответствовало магнитному возбуждению поля, а смещение роликов — электрическому. Эта модель помогла Максвеллу при формулировке его уравнений, описывающих законы распространения электрических и магнитных возбуждений в эфире и материальных телах...

После того как Максвелл получил свои уравнения, он уже больше не возвращался к указанной им частной модели структуры эфира» [6, с. 198].

Как признавал Больцман, «теория Максвелла первоначально содержала не меньше гипотетического, чем любая другая».

Против этой теории были и гипотеза близкодействия, и неубедительный «вывод» уравнений. Но и математический аппарат Максвелла был тоже неприемлем для его современников. К тому времени фанатизм школы кватернионов, по словам Ф. Клейна, сумел вызвать только противодействие со стороны ученых континента. По свидетельству Больцмана, «...на континенте так привыкли к старой теории двух жидкостей, что новые идеи не встретили большого внимания. Кирхгоф, например, до конца жизни лишь мимоходом упоминал теорию Максвелла. Только два физика на континенте — Гельмгольц и Стефан — сразу признали ее значение» [6, с. 110]. Ученикам этих двух ученых — Генриху Герцу и Людвигу Больцману — и суждено было привести к победе теорию Максвелла. Вместе с этой физической теорией восторжествовал и ее математический язык — векторный анализ. Парадоксально, что преодолеть предубеждение против векторного исчисления Больцман и Герц помогли невольно.

Автор учебника векторного анализа «первого поколения» Рихард Ганс писал в предисловии ко второму изданию своей книги (1909): «Вообще говоря, суждение о пользе векторного анализа разделяют не все». При обсуждении работы В. Вина («*Über sogenannte absolute Bewegung*», 1904) К. Нейман сказал: «Вин в своей работе, следуя Герцу и Больцману, избегает кватернионной стенографии и пользуется подробным языком математики. Было бы крайне желательно, чтобы такие действия Герца, Больцмана и Вина стали бы общим правилом. Так как самое лучшее, что можно сделать при важных и трудных исследованиях, — это поменьше краткости и побольше строгости в выводах» [6, с. 177].

Возникает естественное желание узнать что-нибудь об отношении Больцмана и Герца к математическим методам Максвелла.

* * *

Великий австрийский ученый Людвиг Больцман «был физиком и, несмотря на некоторые весьма значительные экспериментальные работы, теоретиком по влечению и характеру деятельности, с сильно выраженным философским уклоном» [6, с. 235].

Больцман имел широкое математическое образование — он читал лекции по теории чисел, уже в 1897 г. использовал теоретико-множественные методы в физических статьях, вводил в физику методы теории вероятностей (с 1871 г.). Больцман писал очерки о физиках, о методах работы ученых, о роли гипотез в творчестве и т. д. Широко известны его прямо-таки восторженные строки о Гиббсе и о Максвелле [6, с. 50], и тем не менее он не принял их общее творение — векторный анализ. Среди его высказываний мы находим такое: «Чтобы достичь максимально возможной свободы гипотез, феноменология должна приписывать этим сущностям в высшей степени сложные, а некоторые сказали бы, парадоксальные свойства (например, что они являются векторами...)»

Больцман перевел на немецкий язык и издал статью Максвелла «О фарадеевских силовых линиях», он прочитал курс «Лекции по максвелловской теории электричества и света» и издал их в двух томах (1891, 1893). Больцману принадлежат первые экспериментальные подтверждения теории Фарадея—Максвелла: из уравнений Максвелла следует, что диэлектрическая постоянная равна квадрату показателя преломления; эксперимент, подтверждающий справедливость этого соотношения, сделанный Больцманом, Лоренц назвал жемчужиной экспериментальной физики. Несмотря на это, Больцман не принял векторный язык теории и считал его «парадоксальным»! Если бегло просмотреть «Трактат по электричеству и магнетизму» Максвелла и «Лекции по максвелловской теории электричества и света» Больцмана, то станет ясно, что это труды, написанные на разных математических языках.

Векторы из теории Максвелла не вошли, конечно, в книгу Больцмана, хотя во втором томе дано определение вектора: «Геометрически мы можем представить смещение отрезком прямой (длиной и направлением), который имеет проекции F, G, H на оси координат и должен поэтому называться вектором (F, G, H) » [47, т. 1, с. 2]. Введенное понятие далее не используется, Больцману привычнее «классическое»: «Пусть ds' — элемент длины,

проекции которого на оси координат dx', dy', dz' » [47, т. 1, с. 101]. И именно таков стиль его «Лекций».

В первом томе слово вектор такое же случайное, как и curl (ротор), например, этот термин встречается только один раз в таком контексте:

«Пусть a, b, c — компоненты того вектора, который англичане называют curl вектора (F, G, H) » [47, т. 1, с. 3].

В «Лекциях» отсутствует оператор ∇ , а вместе с ним *дивергенция*, *градиент* (хотя соответствующие понятия, конечно, в ходу). Все соотношения, уравнения записаны в координатах. Естественно, в теории Фарадея—Максвелла невозможно обойти понятие силовой линии, оно используется Больцманом «в рабочем порядке», слова, которые можно было бы принять за определение, встречаются во втором томе: «Теперь мы хотим провести кривые (линии магнитной силы, а лучше — линии магнитной индукции), которые всюду имеют направление вектора $(M_\alpha, M_\beta, M_\gamma)$, и именно провести их с такой плотностью, чтобы число этих кривых, пересекающих единицу поверхности, было равно величине этого вектора» [47, т. 2, с. 98].

В отличие от работ Максвелла, на чертежах стрелки указывают направление обхода контура, проведены нормали к поверхностям, подробно объяснено, как направление обхода контура связано со стороной поверхности и т. п. Подробно и неоднократно пояснена ориентация системы координат.

Больцман высоко ценил в теории Максвелла ее механическую основу. Свои «Лекции» он начинает так: «Первая гипотеза. Механическая природа электрического тока». По свидетельству Эренфеста, ученика Больцмана, «больцмановское представление теории Максвелла исходит в первую очередь как раз из механических аналогий... Поэтому их подробное обсуждение составляет ядро больцмановских лекций по электромагнетизму, накладывая специфический отпечаток на всю их структуру» [6, с. 199].

В книге есть даже «Лекция № 6. Практическое выполнение модели»; Больцман сообщает, кем выполнены модели и фотографии этих моделей для книги.

Нужно добавить, что после вывода основных уравнений Больцман замечает: «Положим, что данный механический вывод этих уравнений не достаточно обоснован, тогда может служить еще и метод Герца... Само собой разумеется, я не хочу оспаривать высокое значение представления Герца, а хочу только показать, где его логическую строгость еще, кажется, можно дополнить» [47, т. 2, с. 13].

* * *

Другую сторону работ Максвелла ценил Генрих Герц. «На вопрос: „Что такое максвелловская теория?“ — я не знаю ответа короче и определеннее, чем: максвелловская теория — это система уравнений Максвелла...».

В докладе «О соотношении между светом и электричеством» (1889) Герц, наиболее компетентный в данном случае исследователь (по выражению Больцмана), сказал:

«Нельзя изучать эту удивительную теорию, не испытывая по временам такого чувства, как будто в математических формулах есть самостоятельная жизнь, как будто они умнее нас, умнее даже своего автора, как будто они дают нам больше, чем в свое время было в них вложено».

Кажется, трудно выразить свое отношение яснее, и все-таки Больцман сумел увидеть в этом высказывании восхищение математическими моделями Максвелла: «Я бы только хотел добавить к словам Герца, что формулы Максвелла были простыми следствиями его механических моделей, и указать, что хвалебная характеристика Герца в первую очередь относится не к анализу Максвелла, а к его остроумию в изобретении механических моделей аналогий» [6, с. 65].

Возможно, слова Герца могут навести и еще на одну мысль: он не считал «умным» вывод уравнений. А в другом месте его слова прямо обрывают попытки механического объяснения всего и вся в науке: «Все физики согласны с тем, что задача физики состоит в приведении явлений природы к простым законам механики. Однако в вопросе о том, какими являются эти простые

законы, мнения расходятся. Большинство понимает под этим просто ньютоновы законы движения...»

Герц начал исследования в области физики в 1878 г. под руководством Гельмгольца. Все симпатии Гельмгольца принадлежали «дуалистической теории электричества», т. е. теории двух жидкостей. Он предложил Герцу провести опыты, которые «позволили бы высказаться за ту или иную из различных возможных теорий». Нужно было выйти из той области явлений, где и теория Вебера, и теория Максвелла приводили к идентичным результатам. Дж. Дж. Томсон охарактеризовал работы Герца как изумительный триумф экспериментального мастерства, изобретательности и, вместе с тем, как образец осторожности в выводе заключений.

В статьях Герца результаты экспериментов анализируются тщательно и последовательно, после решения уравнений выводы приведены вместе с замечаниями о том, какие предположения не подтвердились и что надо бы сделать и, наконец, заключение: «Опыты, описанные в настоящей статье, как и предшествующие опыты по распространению индукции, изложены без ссылок на какую-либо специальную теорию, так как убедительность этих опытов не зависит от какой бы то ни было теории. Однако ясно, эти опыты могут служить обоснованием теории электродинамических явлений, разработанной Максвеллом, базировавшимся на представлениях Фарадея. Мне кажется, что в настоящее время связанная с этой теорией гипотеза о природе света получает еще большую убедительность, чем до настоящего времени» [12, с. 89].

Герц был очень скромн. Хевисайд мог высказываться о чужих работах решительнее, и он по достоинству оценил опыты, знаменовавшие переворот в физике: «Доказана важная вещь — что электромагнитные волны в эфире, по крайней мере в приблизительном согласии с теорией Максвелла, представляют собой реальность и что метод Фарадея—Максвелла является правильным. Другой вид электродинамической гипотезы полностью выходит из игры. Будет еще множество возможностей для дальнейшей теоретической спекуляции, но она будет действительно

полезной лишь в том случае, если будет максвелловского типа» [12, с. 91]. Сразу же возникла возможность передачи сигналов без проводов — совершенно заслуженной данью уважения и признания была передача слов «Генрих Герц» при первом опыте Попова.

В работах Герца обращает на себя внимание стремление обходиться классическими математическими средствами, без экстравагантных новшеств, даже с некоторой перестраховкой: «Соображения, на которых базировалось доказательство, представляются мне вполне убедительными. Однако... они могут оказаться не вполне очевидными тем, кто с самого начала относится к этим рассуждениям с некоторым предубеждением. Поэтому целесообразно дополнить предыдущее доказательство рассмотрением описываемых ниже явлений, в которых волнообразное распространение индукции в воздухе делается почти непосредственно осязаемым» [12, с. 76].

Наконец, в 1889 г. Герц окончательно установил электромагнитную природу света, доказав справедливость гипотезы Максвелла. «Значение опытов Герца для теории Максвелла окажется еще более важным, если учесть, что Герц с самого начала исходил вовсе не из того, чтобы утвердить теорию Максвелла!» [6, с. 241].

В изложении Герца нет и следов векторных методов Максвелла. Он отмечает, конечно, что в электромагнитной теории оперируют с направленными величинами: «Ту направленную величину, через которую мы прежде всего определяем электрическое состояние, мы назовем электрической силой» [12, с. 211]. По Герцу, направленная величина — это величина, которая определяется заданием трех компонент (то есть проекциями на оси координат). Рассматриваемые им «компоненты электрической силы по координатам x, y, z » трактуются в духе аналитической механики (правда, у него встречаются слова *направленная величина*).

Несмотря на то, что в статьях Герца (как и во всей электромагнитной теории Фарадея—Максвелла) используется понятие силовой линии и один раз встречается слово *поле*, в работах отсутствуют термины *электрическое поле*, *магнитное поле*, *век-*

торное. Вместо них Герц употребляет такое описание: «Для того чтобы определить распределение силы в остальных участках пространства, воспользуемся графическим представлением...» [12, с. 100].

Отсутствие векторных методов у Герца — не просто дань немецкой школе или привычке (в которой признавался его учитель — Гельмгольц), а результат продуманного выбора. Это подтверждается его высказыванием, что теоретическая структура должна «позволять увидеть прозрачно ее логические основы; все несущественные понятия должны быть удалены из нее». В качестве «рудимента математической природы» он приводит понятие векторного потенциала, которое существенно использует Максвелл в основных уравнениях. Герц считает, что достижение «математического преимущества» не оправдывает введение векторного потенциала, что нужно изучать связь между величинами физических наблюдений, а не между величинами, входящими в математические уравнения.

Ко всем этим причинам нужно все-таки добавить еще и элементарную трудность понимания непривычного векторного языка статей, написанных к тому же лаконично. Герц писал Хевисайду: «Это факт, что чем больше прояснялось для меня и чем больше я после этого возвращался к Вашей книге, тем больше я понимал, что, по существу, Вы уже совершили гораздо раньше то продвижение вперед, которое я думал сделать, и тем больше росло во мне уважение к Вашему труду. Но я не сразу извлекал это из Вашей книги, и другие говорили мне, что они вообще с трудом могли понять Ваши работы, поэтому я должен предупредить Вас, что Вы немного непонятны обычному человеку... я боюсь, что Вы до некоторой степени гордитесь тем, что Вы непонятны для других. Я думаю, что это напрасная гордость. Вы, наверное, не знаете, до какой степени трудно понять Ваши работы» [5, с. 38]. (На такие же упреки английских «технарей» в том, что-де трудно читать его статьи, Хевисайд в свое время отвечал, что они не представляют, как трудно их *писать*.)

После смерти Герца была опубликована подготовленная им книга «Принципы механики, изложенные в новой связи». Новый

подход Герца, как известно, состоял в том, что его механика строилась без понятия силы. Заключить из этого факта, что он был движим желанием показать, что векторы — избыточное понятие, было бы необоснованно. Хотя соблазн так подумать велик. Посмотрим, как в этом труде трактуются «векторы».

«Определение 1. Переход материальной точки из начального положения в конечное независимо от времени и способа перехода называется перемещением точки из ее начального положения в конечное. Оно также может быть задано через начальное положение, направление и величину перехода...

Примечание 2. Направление перемещения есть направление линии, соединяющей начальное и конечное положения».

Процитированного достаточно, чтобы понять, как далеко это изложение от векторного исчисления. Да и все определения и теоремы, имеющие хоть какое-то отношение к векторам, заняли бы не более страницы.

Отметим только один момент: Герц допускает (правда, с оговоркой) введение k -мерного пространства.

* * *

И даже после опытов Герца переход от теории Вебера к теории Фарадея—Максвелла не был легким. «Лекции» Больцмана — тому свидетельство. «И это Максвелл? Я не в состоянии согласиться с д-ром Больцманом...» — писал Хевисайд в рецензии [61, с. 383].

Между тем, векторное изложение теории Максвелла уже готовилось в Германии и готовилось именно потому, что Герц доказал справедливость этой теории. В год смерти Герца в Германии вышла книга «Einführung in die Maxwell'sche Theorie der Elektrizität» А. Фёппля, которая открыла серию монографий, построенных по единому плану: первая часть — краткий курс векторного анализа, вторая — физическая теория.

Итак, последователи Максвелла — Больцман, Герц, Хевисайд — развили его идеи по самым разным направлениям. Из них только Хевисайд взял теорию в таком виде, в каком она вышла

из рук ее создателя — на векторном языке. В ходе исследований Хевисайд изменил и уравнения Максвелла, и исчисление векторов, преобразив его в векторный анализ. Больцман и Герц в традициях немецкой школы отвергли «декадентские» (по выражению Столетова) математические методы; неприятие векторных методов типично для математиков и физиков конца XIX в.

Глава 8

«Векторы против кватернионов»

О. Хевисайд

Vectors versus Quaternions — этой юридической формулой озаглавил Хевисайд свою полемическую статью. Разгоревшаяся в последнее десятилетие XIX в. дискуссия сыграла важную роль в распространении векторного исчисления.

В этой «тяжбе» истцами выступили сторонники кватернионов — английские математики (Тэт, Нотт, Маколей), которые защищали «чистоту кватернионной теории» и протестовали против искажения ее «кликой векторного анализа». Однако момент был неблагоприятным для них: эксперименты Герца доказали истинность гипотез Максвелла; в исследованиях Хевисайда «высокая теория, от которой не ждали особой пользы, обернулась важными практическими советами», к которым вынуждены были прислушиваться. Слова рецензии Фицджеральда на книгу Хевисайда «Работы по электричеству» понятны и могли произвести впечатление даже на обывателя: «Статьи имеют большую практическую ценность, потому что они дают обоснованную теорию телеграфа и телефона и других вопросов... Практическая ценность... заключается также в том, что, по единодушному мнению,

результаты Хевисайда могут привести к коренному улучшению в телеграфии и телефонии и даже могут сделать возможной телефонную связь через Атлантику. Статьи имеют ценность и в историческом отношении, так как они представляют собой интереснейший отчет о развитии, методах и о научных взглядах на природу выдающегося, острого и блестящего ума» [5, с. 82].

По этим причинам физики, прежде всего, заинтересовались теорией Максвелла, исследованиями Хевисайда, и «ответчикам» — Гиббсу и Хевисайду — были обеспечены симпатии большинства ученых, следивших за дискуссией. Но и незаинтересованные непосредственно, «бесстрастные» наблюдатели получали массу удовольствия. Томсон, ближайший друг Максвелла и Тэта, отвергавший любые векторные методы, приобрел привычку повторять: «Смотри-ка, как эти вектористы любят друг друга!»

Дискуссия утасла, поскольку аргументы были исчерпаны, а противники не убедили друг друга. Однако стало ясно, что собственно решался не вопрос «Векторы или кватернионы», а вопрос — «Векторы с кватернионами или векторы без кватернионов».

* * *

Итак, вернемся к началу полемики. Она была открыта Тэтом. Общеизвестен его выпад против Гиббса, «задерживающего прогресс теории кватернионов и создавшего род чудовища-гермафродита из обозначений Гамильтона и Грассмана». Менее известна статья Тэта «О важности кватернионов в физике» (1890). В ней кватернионы рекомендуются в качестве средства исследования в физике как предельно выразительный, компактный и элегантный метод. А после этого Тэт объявляет, что кватернионам мешает крайне искусственный метод декартовых координат, «одно из тех препятствий, которые можно полностью избежать и которые тормозят сегодня прогресс математической физики».

Гиббс принял вызов, направив в журнал «Nature» статью «О роли кватернионов в алгебре векторов». В течение трех лет он опубликовал еще три статьи, относящиеся к дискуссии. Напряженнее всего полемика была в 1890–1894 гг. За это время в жур-

нале «Nature» появилось 36 публикаций двенадцати авторов, в частности две статьи Хевисайда. Он объявил войну кватернионам самым официальным образом: «Я до последнего времени очень деликатно и милосердно относился к кватернионам, думая, что, возможно, проф. Тэт изменит обструкционную позицию. Но теперь, кажется, нет шансов на это...» [61, с. 383]. Научные статьи Хевисайда изобиловали выпадами против теории кватернионов. Достаточно перечислить лишь некоторые заголовки его статей: «Трудность кватернионов и сравнительная простота, достигаемая игнорированием их», «Элементарный векторный анализ не зависит от кватернионов», «Тэт против Гиббса и Гиббс против Тэта» и т. п.

Гиббс в статье «О роли кватернионов в алгебре векторов» писал: «Следующий пассаж в предисловии к третьему изданию „Treatise“ Тэта, который недавно привлек мое внимание, кажется, взывает к некоторому ответу: „Even* prof. Willard Gibbs must be ranked as one the retardes of quaternion progress, in virtue of his pamphlet on ‘Vector Analysis’, a sort of hermaphrodit monster, compounded of Hamilton and of Grassmann...”

Достоинства или недостатки брошюры, напечатанной для частного распространения много лет тому назад, не имеют большого значения... Но, кажется, предполагается, что отклонение от кватернионных обычаев в трактовке векторов есть чудовищное преступление... Критика относится, в частности, к обозначениям, но я полагаю, что под обозначениями скрывается глубокий вопрос о понятиях...» [54, с. 156].

А далее следует разбор вопроса по существу. Отдадим себе отчет в том, что шел 1890 г., публикация статей Хевисайда по векторному анализу еще не началась и, следовательно, с векторным анализом были знакомы лишь те 130 человек в мире, которым Гиббс отправил свои брошюры, студенты, слушавшие его лекции (в Америке), и те физики, которые одолели статьи Хевисайда (1885–1890). Ну а теория кватернионов была широко известна, по крайней мере в Англии и Америке. Поэтому, вероятно, когда

* Оттенки слова *even* — «спокойный», «уравновешенный», «справедливый», «честный».

Гиббс рассматривал сумму или произведение векторов

$$\alpha\beta = V.\alpha\beta + S.\alpha\beta,$$

он был совершенно понятен только этой аудитории:

«Возникает вопрос: может ли кватернионное произведение претендовать на видное и фундаментальное место в системе векторного анализа? Оно определенно не удержит такое место среди основных геометрических понятий, как геометрическая сумма, скалярное или векторное произведение...

Мы можем прийти к тем же заключениям от несколько ограниченной, но очень практической точки зрения. Трудно отрицать, что синусы и косинусы играют ведущую роль в тригонометрии. Так вот понятия $S.\alpha\beta$ и $V.\alpha\beta$ представляют собой комбинацию синуса и косинуса угла, заключенного между векторами α и β , с некоторыми другими простыми величинами. Но синус и косинус, скомбинированные с этими вспомогательными понятиями, несравненно более послушны аналитическим преобразованиям, чем просто тригонометрические синус и косинус...

Я не знаю ничего, что могло бы заставить предпочесть кватернионное произведение двух векторов в качестве *фундаментального* понятия в векторном анализе... что не было бы тривиальным или искусственным. То же самое справедливо относительно кватернионного частного и кватернионов вообще... способность описывать вращения не кажется мне достаточной для того, чтобы кватернионам претендовать на место среди *фундаментальных* и *необходимых* понятий векторного анализа» [54, с. 157].

Далее Гиббс доказывает удобство, полезность и необходимость рассмотрения отдельных функций $S.\alpha\beta$ и $V.\alpha\beta$ вместо их суммы

$$\alpha\beta = V.\alpha\beta + S.\alpha\beta,$$

настаивает на том, что «простые и элементарные определения $S.\nabla\omega$ и $V.\nabla\omega$ совершенно не зависят от понятия кватерниона и $\nabla\omega$ вряд ли используется без комбинации с символами S и V ». Он поясняет, что если и вводит новые обозначения, то «только потому, что естественное развитие векторного анализа логически должно вести к некоторым таким обозначениям».

Прямым доказательством справедливости этих утверждений является то, что и Хевисайд проделал независимо все эти преобразования. Но в разразившейся дискуссии каждая фраза, каждое утверждение вызывали ожесточенные опровержения. Немедленно последовал ответ Тэта:

«Векторный анализ, поддерживаемый проф. Гиббсом, включает в себя отклонение от обычной алгебры, вызывающее опасение ввиду того, что $\alpha\beta$ рассматривается не как произведение, а только как вид произведения. Это, вероятно, сделано специально, чтобы запутать обыкновенного студента и, несомненно, в высшей степени искусственно — в то время, как одно из главных достоинств кватернионов — их естественность, т. е. совершенное отсутствие искусственности в их фундаментальных правилах.

Некоторые предложенные проф. Гиббсом обозначения очень изобретательны и хорошо пригодны для быстрого достижения уже полученных результатов...

Я не согласен с утверждением проф. Гиббса о превосходстве его обозначений над кватернионными... Но я имею определенное возражение другого рода против предложенных проф. Гиббсом обозначений: кватернионы избавляют от путаницы из-за большого числа *обязательных скобок* или их эквивалентов... чтобы взять очень простой случай... проф. Гиббс должен написать

$$(\alpha \times \beta) \times (\gamma \times \delta) \times (\epsilon \times \zeta) \dots$$

как эквивалент $VV(V\alpha\beta V\gamma\delta)V\epsilon\zeta$ — это выражение имеет *одну* пару скобок...» («Nature», 1891, т. 3, с. 608).

Это выдержка из самой обстоятельной статьи Тэта «Роль кватернионов в алгебре векторов». В дальнейшем он признавался, что не в силах читать «неуклюжую пародию на привычные обозначения», и знакомился с трудами по векторному исчислению в пересказах Нотта: «Д-р Нотт имел действительно мужество читать брошюры Гиббса и Хевисайда... и выяснилось, что после трудного путешествия через эти бездорожные джунгли он еще более решительно поддерживает теорию кватернионов, чем когда он только вступал в них...»

Хевисайд не упустил возможность обрушиться на противников с сарказмом за это признание: «Так случилось, что проф. Тэт,

будучи неспособным довести свой массивный интеллект до понимания векторов — моих, или проф. Гиббса, или Макфарлана, — поручил проф. Нотту исследовать их, очевидно, в слабой надежде обнаружить в них что-нибудь, что было бы не чрезвычайно презренно...

Естественно ожидалось, что проф. Тэт не будет способен отнестись по справедливости к тем, кто предпочитает трактовать векторы как векторы, и кватернионы как кватернионы (а не смешивать их различные природы и не получать как результат путаницу в физических идеях, а также и в геометрических по той причине, что геометрия есть одновременно физическая наука, имеющая экспериментальное основание). Он не знает ни их путей, ни мыслей, ни работ, что с избытком видно из всего, написанного им против проф. Уилларда Гиббса и других» [61, с. 534].

Статья Нотта «Недавние новшества в векторной теории» — одна из самых важных в дискуссии. Тэт писал о ней: «Статья д-ра Нотта интересна и поучительна — это полная экспозиция претензий и дефектов так называемой Векторной Системы». Во-первых, это, пожалуй, единственный разбор векторного анализа с точки зрения кватерниониста. Во-вторых, в дальнейшем все доводы ЗА теорию кватернионов и ПРОТИВ векторного анализа были повторением сказанного в этой публикации.

Нотт закончил статью словами: «...главные аргументы могут быть кратко сформулированы так:

- a) Кватернион столь же фундаментальное геометрическое понятие, как и любое, названное проф. Гиббсом.
- b) В каждом векторном анализе, развитом до сих пор, подразумевается или установлен явно верзорный характер векторов в произведениях.
- c) Если это так, то следует *естественное* заключение, что квадрат единичного вектора равен -1 .
- d) Предположение, что квадрат единичного вектора равен $+1$, приводит к алгебре неассоциативного характера, в которой ∇ не является реальной наблой теории кватернионов.

- е) Изобретение новых названий и новых обозначений практически не добавляет ничего важного к тому, что мы уже знаем из теории кватернионов».

Из многочисленных обвинений, варьиовавшихся и повторявшихся сторонниками теории кватернионов, можно выделить как наиболее существенные следующие:

1. В значительной части векторный анализ и теория кватернионов ничем не отличаются (прямое обвинение в плагиате).
2. Предположение

$$i^2 = j^2 = k^2 = +1$$

лишает теорию той естественности, которая ей свойственна, и вносит догматизм.

3. Введение определением различных видов произведений векторов столь же «искусственно и догматично».
4. Теория кватернионов позволяет устранить координаты из физики (в частности), поэтому векторный анализ, в котором используются декартовы координаты, есть шаг вспять.
5. Теряются удобные обозначения теории кватернионов.

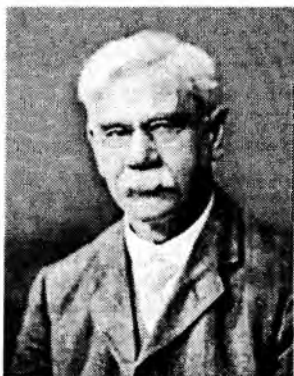
Последние три пункта так тесно связаны, что их можно «разделить» лишь условно.

Рассмотрим отдельно каждый из этих моментов.

1. И Гиббс, и Хевисайд прямо указывали, что идут по пути Максвелла. Хевисайд писал: «Я выводил мою систему от Гамильтона и Тэта упрощением и сокращением». Гиббс тоже не отрицал родства с кватернионами: «Мое первое знакомство с кватернионами состояло в чтении максвеллова *E&M*, где существенно использовались кватернионные понятия. Я убедился, что мне необходимо начать овладевать этими методами, чтобы овладеть предметом...»

Несмотря на эти заверения, а также на то, что Гиббс скрупулезно перечислил главы книги Тэта, которые были полезны при создании векторного анализа, кватернионисты писали в таком тоне, будто разоблачали плагиат: «Нам становится ясно, что

проф. Гиббс умышленно выставляет напоказ систему, свободную от воображаемых недостатков кватернионов, и все-таки... если мы находим при тщательном сравнении, что *практически* диадическая система есть простая модификация кватернионных методов, вообще говоря, отличающаяся только обозначениями, мы не можем найти удовлетворительные причины, чтобы человек, способностей проф. Гиббса, мог покинуть кватернионный путь ради изобретения новых названий для старых вещей и неопределенным, чисто символическим, произведением заменять определенный кватернион» [68, с. 622]. Так писал Нотт в одной из самых обстоятельных рецензий на векторный анализ.



К. Нотт

В упоминании «неопределенного, чисто символического произведения» есть некоторая недобросовестность (как это уже было отмечено). В самом деле, речь идет о линейном операторе (протицируем книгу Гиббса—Уилсона):

$$\tau' = a_1(b_1 \cdot r) + a_2(b_2 \cdot r) + a_3(b_3 \cdot r), \quad (6)$$

где a_1, a_2, a_3 — векторные величины, τ' есть линейная функция от r .

Ради краткости (6) можно записать символически в форме

$$\tau' = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) \cdot r. \quad (7)$$

На самом деле выражению $(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)$ не приписывается никакого частного физического или геометрического значения. Оно должно рассматриваться как оператор или символ, который превращает вектор r в вектор τ' и который позволяет удобно и быстро писать соотношение (6)» [55, с. 265]. Именно такие операции свойственны доказательствам теории кватернионов, они десятки раз встречаются у классиков этой теории — Гамильтона и Тэта. (Вспомним хотя бы оператор набла.)

Приведенные выше слова Нотта — выдержка из его рецензии на книгу Гиббса—Уилсона (1903), т. е. они написаны через десять лет после дискуссии. В них видна не смягчившаяся враждебность, которая появилась еще в первых статьях против векторного анализа: «Есть нечто почти наивное в способе, которым Хевисайд вводит диады, как что-то совершенно новое, непохожее на все, имеющееся у Гамильтона или Тэта. Может показаться, что Гамильтон или Тэт что-то упустили». Это заявляет тот самый Нотт, который одобряет метод диад Гиббса: «Несомненно, метод диад — очень четкий путь представления триномиальной формы линейной векторной функции и имеет свои достоинства» [68, с. 615].

2. Один из самых принципиальных моментов — знак «минус» в квадрате вектора. Кватернион является обобщением комплексного числа, гиперкомплексным числом, кватернионисты не хотели терять связь с комплексными числами и с алгеброй. Для них вопрос о знаке квадрата вектора, об умножении векторов был неразрывно связан с трактовкой единичного вектора как верзора.

Другая сторона проблемы — мнение физиков (в частности, Хевисайда): «Как может быть квадрат вектора отрицателен? Кватернионы в своих векторных аспектах антифизичны и не гармонируют с общей скалярной математикой» [61, с. 384]. Гиббс также доказывал, что «система векторного анализа не требует никакой поддержки от понятия кватерниона или от мнимости алгебры» и что внимание к этой стороне теории приносит ущерб векторам: «При чтении трудов по теории кватернионов мы найдем, что очень много внимания уделено мнимым величинам и очень мало — векторам... Короче, векторный анализ, кажется, — только второстепенный предмет» [54, с. 169].

Кроме Гиббса и Хевисайда, ученик Тэта — Макфарлан, построил систему, которая была чем-то промежуточным между теорией кватернионов и векторным анализом. Макфарлан указывал, что допущения $i^2 = +1$ и $i^2 = -1$ совершенно произвольны алгебраически, они основаны на разных аксиомах и «равнозаконны».

Защитники кватернионов усмотрели в этом основную опасность. Маколей писал: «Таким образом допускается, что возможна лучшая система, чем кватернионы... Я могу показать, что позиция диссидентов недалеко от самоубийства».

В свое время Гамильтон вновь и вновь возвращался к доказательству положения $i^2 = -1$. Вероятно, удовлетворивший его вариант изложен в предисловии к «Лекциям о кватернионах» [58, с. 52]. Доказательство содержит ошибку (помимо всего прочего), но интересно другое: кватернионисты, постоянно использовавшие имя Гамильтона и для защиты, и для нападения, никогда не упоминали этого отрывка! Правы они только в том, что множество векторов векторного анализа не является ассоциативной алгеброй, операции потеряли алгебраический характер.

Ну, а что говорил об этом Тэт? В годы дискуссии он довольно невежливо ответил одному читателю: если человек не понимает таких вещей, он не дорос до науки. А ведь Тэт имел «фору»: такой вопрос ему был задан Максвеллом еще в 1878 г. Но ответное письмо Тэта не сохранилось, и его мнение осталось неизвестным. Нотт уверен, что существовал убедительный ответ.

Если критики векторной системы указывали на искусственность определений произведений, то Хевисайд не упустил ни одной возможности поиздеваться над «противоестественным» $i^2 = -1$: «Это особое соглашение кватернионно пригодно. Но в практическом векторном анализе физики оно практически не пригодно... Я не уверен, что хоть кто-нибудь совершенно понимает это положение. Это сделано во второй главе „Treatise“ Тэта. Я никогда ее не понимал и всегда пропускал...» [61, с. 35].

Какова ирония истории! Для строгого обоснования операционного исчисления Хевисайда пришлось прибегнуть к преобразованию Лапласа, к тем самым мнимым единицам, которые Хевисайд отказывался понимать!

Что этот пункт разногласий — один из основных, понимали все. Например, в анонимной рецензии на книгу Макфарлана «Принципы алгебры векторов» было написано: «Широкому использованию кватернионов в физике препятствует тот факт, что значение произведения векторов поставлено в зависимость от ис-

пользования вектора как квадрантального верзора, и тот факт, что в этом методе квадрат вектора отрицателен...»

В 1966 г. Борк пишет о полемике: «Было бы очень интересно узнать, кто писал обзор книги Макфарлана... он определенно на стороне Хевисайда и Гиббса... Рискнем предположить, что автором был Фицджеральд. Он — один из немногих физиков, благожелательных к Оливеру Хевисайду».

Рискнем и мы: кажется, автор рецензии — Гиббс. На эту догадку наводит следующее обстоятельство: Гиббс писал слово *параллелепипед* как *parallelOpiped*. И именно таково написание в рецензии (оно не было общепринятым: Тэт иронизировал по этому поводу).

Отрицательный квадрат «возбуждал беспокойство» Максвелла; к обсуждению знака квадрата вектора постоянно возвращался Хевисайд: «...в физике это предположение является навязчивым камнем преткновения... налицо недостаток гармонии со скалярными исследованиями и трудности в быстром переходе от декартовой системы к векторам и наоборот» [61, с. 35].

В 1903 г. журнал «Nature» кратким некрологом оповестил читателей о смерти Гиббса. Среди важнейших результатов учебного, «оставивших след в физике и химии», указано и то, что он «предложил алгебру векторов с новыми обозначениями для произведения двух векторов, построенного таким образом, чтобы давать положительное значение для квадрата вектора».

3. В каждой статье обсуждалось разделение полного кватернионного произведения векторов на два отдельных, различных. Нотт писал по этому поводу: «С самого начала существует серьезное возражение против такой формы произведения векторов. Не существует частного... Причина, конечно, в том, что $\alpha\beta$ не есть полное произведение... Совершенно нецелесообразно (мягко сказать) использовать систему обозначений, живо напоминающих обозначения для умножения обычных алгебраических величин, систему, не имеющую аналогов процессов, с помощью которых любой множитель может быть найден делением...» (Аргументы переходили из одной статьи в другую. Суинберн тоже писал: «Если векторы умножаются, они должны и делиться...»)

На протяжении десятилетий «произвольность, догматичность и искусственность» определений скалярного и векторного произведений была объектом критики. Часто сюда же подключался вопрос о знаке скалярного произведения или об обозначениях. Так, Минчин писал в рецензии на работы Хевисайда: «Автор совершенно произвольным и догматическим определением полагает скалярную часть произведения равной $+ab \cos \theta$ ».

Гиббс и Хевисайд доказывали целесообразность именно такого построения теории, какое предлагает векторный анализ. Они приводили методологические соображения и подчеркивали, что Тэт тоже использует отдельно $S.\alpha\beta$ и $V.\alpha\beta$, а не полное кватернионное произведение

$$\alpha\beta = S.\alpha\beta + V.\alpha\beta.$$

Гиббс в статьях и письмах рассказывал о том, как он пришел к заключению о необходимости ввести различные виды произведений векторов: «Рассматривая произведение векторов, я увидел, что существуют две важные функции (или произведения), называемые векторной и скалярной частями произведения, но объединение этих двух форм, дабы образовать то, что называют полным произведением, не продвигает вперед теорию как инструмент геометрического исследования. Относительно оператора ∇ я опять-таки видел, что векторная и скалярная части результата представляют собой важные операции, но их объединение (обычно для того, чтобы впоследствии их разъединить) не кажется мне ценной идеей. В действительности это только повторение моих первых наблюдений, так как оператор ∇ определен посредством умножения векторов, и изменение понятия произведения $\alpha\beta$ включает и изменение в использовании оператора ∇ .

Поэтому я начал развивать с самого начала алгебру двух видов умножения, три дифференциальные операции ∇ , примененные к скаляру и вектору, и те функции или, вернее, интегральные операторы, которые (при определенных ограничениях) являются обратными к названным дифференциальным...» [78, с. 107].

Поскольку определение векторного произведения без изменения перенесено из теории кватернионов, то должны были

сохраниться свойства, важные и характерные для теории кватернионов: $i \times j = k$, оператор i вращает вектор j на 90° ; повторное применение его дает $i \times k = -j$, т. е. $i^2 = -1$. Об этом много раз напоминал Нотт.

Мы видим, как неразрывно связаны обсуждаемые вопросы.

4. Кватернионисты протестовали против употребления декартовых координат, они считали, что кватернионы — средство, позволяющее избежать координат. Поэтому обстоятельство, которое с точки зрения Хевисайда, Гиббса было доводом ЗА векторный анализ, по воззрениям Тэта, Нотта свидетельствовало ПРОТИВ него. Суинберн «обличал» Хевисайда: «Он постоянно прибегает к картезианству, и его векторный труд имеет склонность вырождаться в декартову стенографию». А Хевисайд действительно напоминал: «...необходимо приспособить наши обозначения к требованиям физики. Это очень важно. Большая часть вычислений есть и всегда будет скалярной, т. е. согласованной с общей алгеброй» [61, с. 77].

Мнение Тэта — диаметрально противоположно: славу Гамильтону принесло то, что он освободил математику от координат и благодаря ему «из наиболее искусственной системы выросла, как по волшебству, абсолютно естественная!» Правда, первоначально Гамильтон определил оператор ∇ «в тяжеловесной форме

$$i \frac{d}{dx} + j \frac{d}{dy} + k \frac{d}{dz}.$$

Но это было в раннем младенчестве нового исчисления». Вскоре Тэт открыл «менее искусственное определение, свободное от декартова символизма».

В 1890 г. Тэт предложил уже несколько таких определений. Например, ∇ можно определить соотношением

$$-S.\alpha \nabla = d_\alpha,$$

здесь α — единичный вектор некоторого направления, а d_α означает производную по этому направлению. Или еще вариант. Как

и любой вектор, ∇ можно разложить по трем взаимно перпендикулярным направлениям:

$$\nabla = a\alpha + b\beta + c\gamma,$$

где коэффициенты вычисляются как скалярные произведения соответствующих ортов на ∇ , при

$$\alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2 = -1$$

(язык последней фразы, конечно, современный):

$$a = -S.(\alpha\nabla), \quad b = -S.(\beta\nabla), \quad c = -S.(\gamma\nabla).$$

Тогда

$$\nabla = -\alpha S.\alpha\nabla - \beta S.\beta\nabla - \gamma S.\gamma\nabla = \alpha d_\alpha + \beta d_\beta + \gamma d_\gamma,$$

что при α, β, γ , равных i, j, k , переходит в формулу Гамильтона.

Вполне понятно мнение Хевисайда: «Результат — исключительно мощная алгебра кватернионов... И с кватернионной точки зрения проф. Тэт совершенно прав в своих панегириках. Но когда Тэт хвастает естественностью кватернионов и совершенной пригодностью для использования их в физике, я думаю, он совершенно несправедлив. Векторы должны трактоваться векторно*. Если это так, то предмет сильно упрощается...» [61, с. 77].

Все, что писал Тэт в дискуссии, говорит о его почтении к памяти Гамильтона и нежелании вникать в аргументы противной стороны. Он был убежден в «неминуемой импотентности и нежизненной громоздкости» каждой векторной системы, в которой нет кватернионной основы, и считал, что просто не стоит «выучивать новую и неуклюжую пародию на... знакомые обозначения».

Тэт был преимущественно физиком, но свои физические работы он тщательнейшим образом отделял от кватернионных

* Нотт остроумно продолжил: «А роторы — роторно, скаляры — скалярно, алгебра — алгебраически, геометрия — геометрически».

(неизвестно, сколь виновен в этом был Томсон). Между тем, Хевисайд, непрерывно публиковавший статьи по электромагнитной теории, уже считался наиболее выдающимся последователем Максвелла и, безусловно, имел право говорить от имени физиков. Он заметил и ту особенность творчества Тэта, что его физические исследования не кватернионы: «Если бы в обычных исследованиях по математической физике встречались кватернионы, то физики без колебания использовали бы их. Но они этого не делают. Если Вы переведете физические исследования на векторный язык, Вы не получите кватернионов, Вы получите векторную алгебру. Даже „Treatise“ Тэта учит тому же, так как в физических приложениях кватернион едва ли когда-нибудь занят» [61, с. 76].

И Гиббс, как физик, отвергал кватернионы:

«...Я прошу разрешения процитировать то, что сказал Маколлей... (1892): „Важное отличие кватернионов от других отраслей математики состоит в том, что математики изучают кватернионы после того, как они в течение многих лет упорных трудов заложили основания всех своих будущих работ. Все они вырастают из определенного места славного дерева математики и питаются соками своего дерева. Но у кватернионов другое положение...“ Неудивительно, что математики, физики, астрономы и геометры испытывают некоторое сомнение относительно ценности и необходимости так отделиться от всех ветвей обучения... не обескураживает ли сообщение, что для того, чтобы использовать кватернионный метод, нужно отказаться от прогресса, уже полученного в своей любимой науке, и возвратиться к началу и стартовать снова параллельным курсом?» [54, с. 170].

Несмотря на то, что Гиббсу и Хевисайду не удалось переубедить своих противников, они, вероятно, считали, что победа за ними, так как «широкая реклама» векторам была обеспечена. Во всяком случае в следующих словах Хевисайда чувствуется ликование: «...практически нет шансов для кватернионов, как для системы математики, используемой физикой.

Вектор — это не кватернион и никогда им не был, и никогда им не будет, и его квадрат не отрицателен... Векторный анализ

имеет чисто векторную основу, и кватернион будет (если вообще желать его сохранить) не более чем вспомогательное средство при случае, как специальный вид оператора» [61, с. 384].

5. В вопросе об обозначениях тесно переплелись все проблемы дискуссии. Почти невозможно определить, где кончается обсуждение обозначений скалярного и векторного произведений и где начинается вопрос о структуре исчисления, что является фундаментальным понятием — кватернион и полное кватернионное произведение или вектор и разные виды произведений? С обозначениями же связаны и обвинения в плагиате. В самом деле, как удобно, обнаружив под новыми символами знакомую формулу (а ведь формула двойного векторного произведения не может стать иной!), заявить о плагиате, а заодно и о бесплодности векторного анализа. С обозначениями связаны и стремление Тэта «сбросить декартовы путы», и стремление Хевисайда — не совершать «этой смертельной ошибки». Не случайно на предыдущих страницах, где говорится о других «обвинениях», так часто встречаются высказывания об обозначениях (причем в такой форме, что их невозможно пропустить, отложить до этих строк). И, наконец, нежелание кватернионистов вникать в доводы и аргументы противника по существу тоже обусловлено символикой (да и в явном виде это высказано Тэтом).

Полемика ведь и началась с критики обозначений. И той и другой стороне удобно было вначале представить проблему как «изменение обозначений» — кватернионисты на этом основывали обвинения в плагиате. Гиббс и Хевисайд могли рассчитывать на «мирное сосуществование» теории кватернионов и ее побочной ветви. Признавался же Гиббс, что рад был укрыться за одним-двумя знаменитыми именами, «внося изменения и обозначения, которые... не будут приняты сторонниками кватернионного метода» [78, с. 107].

С самого начала дискуссии Гиббс четко отделил вопрос об обозначениях от вопроса о понятиях, и если снисходил до этой темы, то обязательно подчеркивал ее второстепенность. Объяснив, что он использовал точку и крестик как символы, уже

связанные с умножением и имеющимися в типографиях, Гиббс добавил: «Я не имею особого пристрастия именно к этим знакам». А Хевисайд дорожил своими обозначениями, но он мог пойти на кажущуюся уступку: «Есть только один пункт, в котором я склонен допустить изменение, а именно — поставить префикс перед скалярным произведением, скажем писать $S.\alpha\beta$ вместо $\alpha\beta$, чтобы уравновесить $V.\alpha\beta$ » [61, с. 384]. И это был самый ехидный шаг, потому что эта мера доказывала, что дело не в обозначениях (вернее, не столько в обозначениях). А понятиями создатели векторного анализа не поступились бы.

В частном письме Гиббс писал: «Я не утверждаю с уверенностью, что предложенный мною метод наилучший, но во всяком случае он намного лучше всего, что я мог найти без использования векторных обозначений» [78, с. 247]. Мнение Хевисайда о введенных им обозначениях цитировалось много раз. Приведем еще одно из его высказываний: «...Кватернионный вид формул тяжел для чтения и длинен для использования... У Тэта в два раза длиннее. Но не только краткость важна. Надо стремиться к ясности, отчетливости, и это также гарантируется отказом от использования кватернионов».

В полемике обыгрывалось и то обстоятельство, что в векторном анализе нет единства в обозначениях. Это, вообще говоря, совершенно естественно, ибо Гиббс и Хевисайд создали свои системы независимо и почти одновременно. Итог обсуждению этого вопроса подводят высказывания Гиббса и Хевисайда. Гиббс, заканчивая полемику, писал в статье «Кватернионы и алгебра векторов» («Nature», 1893, № 47): «Я не могу придавать такое значение, как м-р Маколей, единообразию обозначений... и не нахожу, что все так плохо, как считает м-р Маколей. Все-таки вопрос об обозначениях, хотя и не жизненно важный, но существенный... нежелание вносить новшества в обозначения — мощный мотив, удерживающий меня от публикаций... Я считаю, что обозначения... брошюры более гибки, чем используемые обычно» [54, с. 180].

Вероятно, эти слова Гиббса можно принять за признание, что он готов перейти к обозначениям Хевисайда. Хотя со време-

нем победили обозначения Гиббса и Грассмана, сейчас приняты точка и крест или скобки — круглые и квадратные.

А Хевисайд в этом же томе «Nature» писал: «Что касается единообразия обозначений, то смею думать, что оно придет в свое время. Мы первые заставили людей изучить дело и думать о нем. Я создал мою систему такой, как она есть, совершенно независимо от проф. Гиббса. Несмотря на это я с готовностью принял бы его обозначения (как я принял его понятие диадического линейного оператора), если бы нашел, что они лучше. Но этого нет. Я чрезвычайно тщательно отобрал обозначения, чтобы как можно теснее гармонизировать их с обычными математическими идеями, процессами и обозначениями; я не думаю, чтобы Гиббс преуспел так же хорошо. Но дело не в этом. Действительно важная вещь — свергнуть деспотию кватерниона (отвоевать позицию, которую он узурпировал так долго) с помощью проникновения векторного анализа, столь горестно задерживаемого» [61, с. 384].

Единообразие в векторных обозначениях так и не было достигнуто (о широком обсуждении обозначений — ниже). Но ко времени выхода первых учебников по векторному исчислению относится такое удивительное мнение: «Это различие в обозначениях часто принуждает упражняться в обозначениях автора, прежде чем приступить к чтению книги. Практически это означает потерю времени, дидактически, напротив, весьма полезно проследить различные векторные операции в новых обозначениях, так как таким образом можно лучше проникнуть в сущность вычисления, независимо от обозначений» [44, с. 58].

Из всевозможных обвинений и доказательств с подсчетом числа знаков, индексов и скобок в той или иной формуле приведем только одно, поскольку оно кажется удачным. Нотт писал, что предложенное Хевисайдом обозначение вектора жирной печатью исключительно неудобно или удобно только в типографской печати, а карандаш, перо или мел вызовут неизбежную путаницу между $\mathbf{a}$ и a , а ведь «векторный анализ есть вещь для использования».

Вопрос об обозначениях рассмотрел и Кэли в статье «Координаты против Кватернионов» (1894). Кэли даже привел кон-

кретную задачу и, разделив лист на две части (вдоль), провел два решения — в декартовых координатах и в кватернионных обозначениях. Получены два решения, они, конечно, эквивалентны, «но кватернионист говорит, что $m\gamma = V.\alpha\beta$ — краткое и элегантное решение задачи, и противопоставляет его искусственному и неуклюжему

$$x : y : z = (y_1 z_2 - y_2 z_1) : (z_1 x_2 - z_2 x_1) : (x_1 y_2 - x_2 y_1)».$$

Кэли сравнивает компактную кватернионную формулу с карманным атласом — чтобы пользоваться им, его надо раскрыть; точно так же, чтобы понять кватернионную формулу, ее надо перевести в координатный вид. По его мнению, чем сложнее задача, тем больше выигрыш в краткости, но тем нужнее развернутая формула, а кватернионисты противопоставляли краткой символической записи (например, условие компланарности $S.\alpha\beta\gamma = 0$) «соответствующую скучную координатную формулу», записанную в виде детерминанта. Кэли пишет, что условие ($S.\alpha\beta\gamma = 0$) надо сравнивать с такой же краткой записью $\Delta = 0$. Если же задать конкретные векторы их проекциями, то кватернионная формула не короче. Вероятно, Кэли выразил отношение большинства математиков к кватернионам: кватернион как математическая сущность — интересен и важен, но как метод прикладной математики не полезен. И это еще очень мягкое суждение, если вспомнить, что Тэт объявил войну координатам.

Итак, по этому вопросу стороны также не смогли убедить друг друга. Кватернионисты превозносили лаконичность и удобство своего метода. Гиббс же категорически подытожил спор:

«Существует мало формул, в которых достигается выигрыш в компактности при использовании кватернионов, но и этот выигрыш... за счет ясности.

Этих соображений достаточно, я думаю, чтобы показать, что позиция кватерниониста не является единственной, с которой можно рассматривать предмет, и что метод, уродливый с одной точки зрения, может быть нормальным и неизбежным — с другой» [54, с. 158].

В полемике затрагивались и другие вопросы. Хевисайд неоднократно подчеркивал неоднозначность понятий в теории кватернионов (о чем писал еще Максвелл в письмах к Тэту). Он как будто повторяет слова Максвелла: «Когда вектор рассматривается как вырожденный кватернион, то он и ведет себя как кватернион, т. е. в одном и том же уравнении один вектор является вектором, а другой — верзором. Или наоборот — один и тот же вектор может быть вектором в одном месте и кватернионом — в другом» [61, с. 76].

Надо признать, что ответ Суинберна ничего не проясняет: «...он [Хевисайд. — Н. А.] считает трудным распознать, когда вектор является вектором, а когда — кватернионом. Ответ состоит в том, что он является вектором, когда он есть величина, и верзором, когда он оператор. Не возникает никаких трудностей, если человек не путает оператор с величиной...» Да ведь в том-то и дело, что векторы в теории кватернионов имеют двойкий смысл и разделить эти смыслы, как рекомендует Суинберн, невозможно. Следы этого положения остались и в современной векторном исчислении: $i \times j = k$. Эту непоследовательность векторного анализа отметил Нотт.

В споре промелькнул и практически не обсуждался вопрос о распространении исчисления на n измерений. Гиббс считал существенным преимуществом системы Грассмана и векторного анализа возможность легкого перехода к n -мерному случаю. Причем у Гиббса эта проблема не стояла особняком, а была органически связана с уже рассмотренными вопросами: «Насколько функции $S.\alpha\beta$ и $V.\alpha\beta$ глубже проникают в природу вещей, чем любая другая функция от кватерниона, становится ясно при попытке распространить наши формулы на пространство 4-х или более измерений... Понятие кватерниона не приложимо к такому пространству. Но векторы в таком пространстве существуют, и должен быть векторный анализ для таких пространств» [54, с. 156].

Тэт недоумевал: «Примечательно, что возражения проф. Гиббса вызывают то в кватернионах, что я всегда считал их главным достоинством (после их совершенной естественности) — а имен-

но, что они „приспособлены единственно для евклидова пространства и поэтому особенно полезны в некоторых наиболее важных ветвях физической науки“. Что будут делать студенты-физики, как таковые, в пространстве более трех измерений?». Для Гиббса, который ввел понятие фазового пространства*, этот вопрос был важен, а кватернионисты писали, что обсуждать эту проблему все равно, что начинать решение ирландского вопроса дебатами «есть ли жизнь на Марсе?» Прежде чем вышла книга о жизни Тэта, Зоммерфельд предложил распространить понятия векторной алгебры на четырехмерное пространство.

Гиббс в обстоятельной статье провел анализ исчислений Гамильтона и Грассмана («Кватернионы и учение о протяжении», 1891); статью полностью проигнорировали — векторный анализ мешал кватернионистам больше, чем учение Грассмана.

Полемика означала, что началось постепенное вытеснение теории кватернионов из завоеванных ею областей и предсказанное Хевисайдом проникновение векторов в физику и геометрию.

* Статья Гиббса, в которой он ввел понятие фазового пространства, была лишь в одну страницу (1884).

Глава 9

«Труд будет игнорироваться математиками»

Э. Куммер

В истории векторного исчисления нельзя не назвать имени немецкого математика Германа Грассмана. «Творение Грассмана превосходит гамильтонов труд глубиной и совершенством», — пишет М. Кроу, разделяя мнение Гиббса.



Г. Грассман

Если Грассман и оказал влияние на создание современного векторного исчисления, то именно через Гиббса. Слово «если» здесь очень существенное, так как несмотря на восхищение трудами Грассмана, Гиббс писал: «...я увидел, что мои методы приближались к методам Грассмана, я достал два экземпляра „Учения о протяжении“ издания 1844 и 1861 годов... В действительности у меня не хватило настойчивости изучить хотя бы один из них. И я, может быть, почерпнул больше из его различ-

ных статей, чем из этого труда. Однако я не думаю, чтобы труды Грассмана оказали особое влияние на мой „Векторный анализ“... Начав с некоторого знания методов Гамильтона и под влиянием простого желания найти простейшие алгебраические методы для выражения отношений в геометрической физике и т. п., я пришел к векторной алгебре Грассмана независимо от него или кого бы то ни было другого» [78, с. 107].

Герман Гюнтер Грассман был преподавателем в гимназии города Штеттин (как и его отец). Он изучал теологию в Берлинском университете и только с 1830 г. — математику и физику. Чтобы получить право преподавать, он должен был выполнить конкурсное исследование. Эта работа, написанная в 1839 г., была опубликована только в 1911 г. и представляет собой лишь историческое свидетельство того, когда именно Грассман проявил интерес к проблемам, которые стали делом его жизни. Но по иронии судьбы именно эта работа удостоилась одобрительных отзывов. В 1844 г. Грассман опубликовал книгу «Die Wissenschaft der extensiven Grösse oder die Ausdehnungslehre...» («Линейное учение о протяжении»). Он послал ее нескольким математикам с просьбой дать отзыв. Лучше других мог судить об этой работе Мёбиус, поскольку некоторые части книги Грассмана были близки его «Барицентрическому исчислению» (1827). В этой теории Мёбиус, исходя из понятия центра тяжести, ввел операции с «точками с весами». Здесь неминуемо должны были появиться некоторые родственные черты с теорией Грассмана. В 1840-х гг. эти два математика переписывались и встречались. Получив книгу Грассмана, Мёбиус ответил: «Философский момент Вашей выдающейся работы я не готов оценить и даже понять». А в письме к Бальцеру Мёбиус сообщил, что много раз пытался читать книгу, но не смог продвинуться дальше первой страницы, и что он знает единственного математика — Бретшнайдера, одолевшего «Ausdehnungslehre». Бальцер довольно язвительно заметил, что нет возможности вникнуть в идеи книги — начинается головокружение. (Однако Мёбиус помог опубликовать статьи Грассмана, за которые он получил премию — это, конечно, было некоторой поддержкой и, кстати, единственной.)



А. Ф. Мёбиус

Гаусс ответил Грассману (декабрь, 1844), что увидел в его книге «концентрированную метафизику комплексных чисел», которая была использована им около полувека тому назад. Из этого письма Грассман узнал, что его исследование имеет отношение к комплексным числам. Гаусс отметил, что им опубликована «только малая часть и как бы мимоходом... эти попытки (сообщенные по другим поводам) может разглядеть только внимательный взгляд» [53, т. 10, с. 436]. От оценки работы Грассмана «по

существу» Гаусс уклонился: «Однако это, кажется, только частичное и отдаленное сходство в направлении работы, я отчетливо вижу: чтобы найти собственно ядро Вашей работы, необходимо прежде всего познакомиться с Вашей собственной терминологией. Однако для этого мне необходимо было бы время, свободное от занятий, которые я не могу сейчас отложить. Мои благодарности...»

Наконец, когда Грассман пытался получить место преподавателя в университете, работа была направлена на отзыв Куммеру (1847). Куммер прежде всего обратил внимание на неудачную форму изложения, что же собственно до содержания работы, то он писал: «Трудно составить правильное мнение, так как для этого необходима полная проработка его. Однако по точной проверке многих пунктов я действительно обнаружил новые и интересные точки зрения...» [52, с. 127].

Действительно, подобно многим другим самоучкам, Грассман создал свою собственную терминологию («номенклатуру» — как писали многие), и чтобы понимать его сочинения, надо было в ходе чтения постигать «новый язык». Книги Грассмана нельзя читать «с середины» — их необходимо прорабатывать страницу за страницей. Именно это отметили Гаусс и Куммер, а затем повторяли многие. Куммер предсказал, что работа будет игнорироваться математиками, что, впрочем, к тому времени уже было ясно.

В бурные 1848–1849 гг., когда Якоби сказал, что математик может быть только демократом, Грассман вместе с братом Робертом начал издавать политическую газету. У братьев были и общие математические интересы. В их совместных работах по математической логике впервые развиты представления о генетическом способе построения теории.

«Едва обозримо число тех разнообразных областей, которыми занимался Грассман и которые он обогатил своими исследованиями. Он был не только математиком оригинальнейшего склада с сильно выраженными философскими интересами, но и физиком... Грассман проявлял большой интерес к музыкальному искусству и был в этой области весьма одарен... в особенности его привлекала область сравнительного языкознания, в которой он деятельно работал, эта область обязана ему составлением словаря к Ригведам, сборником немецких народных песен... Политические, социальные, церковные вопросы интересовали его живейшим образом...» [23, с. 213]. В филологии Грассман быстро добился признания.

В 1861 г. были опубликованы книги Г. Грассмана «Теоретическая Арифметика» и второй вариант «Ausdehnungslehre» (часть тиража отпечатана в 1862 г.) — сам Грассман ввел обычай именовать эти издания «Линейного учения о протяжении» как A_1 и A_2 (обычай, который до сих пор сохранился в литературе). После выхода книги Грассман с грустью заметил: «Эта новая работа встречена даже с меньшим вниманием, чем первая». Издатель известил автора, что книга продается с трудом и 600 экземпляров использованы как макулатура.

Грассман творил в полной математической изоляции. Создается впечатление, что преодолеть его стиль изложения смогли лишь те математики, которые сами занимались родственными проблемами. Это относится к Гауссу, Мёбиусу, Гамильтону и, наконец, к Ганкелю, узнавшему о труде Грассмана из предисловия к «Лекциям о кватернионах». Мёбиус занимался этой темой в течение всей жизни (начиная с 1848 г.). В его последних статьях Кроу усматривает влияние Грассмана. Работы Мёбиуса написаны четко, корректно, ясно. Они встречены благожелательно, но не оказали сколько-нибудь заметного влияния.

Только в конце жизни у Грассмана появилась некоторая надежда на признание: во-первых, сын Грассмана, учившийся у влиятельного Клебша, смог заинтересовать учителя работами отца, и, во-вторых, Герман Ганкель, ученик Римана, изложил в своей книге «Теория комплексных числовых систем...» (1867) часть учения Грассмана и впервые назвал его гениальным ученым. Возможно, эти два математика изменили бы ситуацию и Грассман был бы «открыт» на полвека раньше, чем это произошло в действительности, однако неожиданно ранние смерти Клебша и Ганкеля отодвинули это событие до двадцатого столетия.

По оценке М. Кроу, с 1881 по 1900 г. было написано около 150 статей и 9 книг «грассмановского направления» (кроме собрания трудов Грассмана) и около 600 «кватернионных» публикаций за половину XIX века. В 90-х гг. XIX в. по инициативе Гиббса и Клейна (который воспринял увлечение Грассманом от Клебша) начинается подготовка и издание трудов Грассмана (1894–1911). Однако и до сих пор труды эти не прочитаны. В биографическом очерке, написанном Р. Штурмом, Е. Шредером, Л. Зонке (1879), признано: «Излагал Грассман свои произведения по большей части в очень трудной для понимания форме. Только немногие из его результатов, да и то преимущественно геометрические, приобрели некоторую известность, благодаря напечатанию их в журнале Крелля... — средство, к которому решил обратиться автор с целью объяснения своей главной работы.

...Говорить о дальнейших исследованиях Грассмана в области анализа... мы не будем. Делаем это не потому, чтобы считали их менее важными, но потому, что находим себя пока недостаточно ознакомленными с ними» [45, с. 34]. Эта оценка математиков, видимо, более других расположенных к Грассману и даже в какой-то степени обязанных разобраться в работе ученого, поскольку они писали его биографию, дает представление о трудностях чтения трудов Грассмана.

Другой автор, Бурали-Форти, также пишет: «Идеи Грассмана слишком сложны, чтобы здесь можно было остановиться на них подробно!» И это написано в работе, посвященной специально

разбору некоторой части теории Грассмана «Introduction à la géométrie différentielle suivant la méthode de Grassmann» (Paris, 1897).

Для подтверждения мнения ученых приведем определения интенсивной и экстенсивной величин: «...интенсивная величина — это то, что стало через порождение равного, экстенсивная величина или протяжение — то, что стало через порождение различного.

...В экстенсивной величине выступает обособление элементов, которые — поскольку они образуют одну величину — соединены между собой, но которые составляют величину именно в их отделении друг от друга» [13, с. 72].

Читатель, который все понял, может бросить камень в Мёбиуса и прочих (или подивиться гениальности Гиббса). А вот комментарий, принадлежащий В. Ф. Кагану:

«...Грассман хочет построить учение, которое охватывало бы различные ветви математики. Материал, над которым он оперирует, есть *протяжение*, а точкой отправления для построения этого понятия служит некоторый переменный объект — элемент. Этот элемент последовательно проходит через различные состояния, совокупность которых образует „протяжение или систему первой ступени“. Но такая система может быть, в свою очередь, рассматриваема как элемент, последовательными изменениями которого образуется „система второй ступени“ и т. д. Так, если принять точку за первоначальный элемент и ее движение рассматривать как последовательное изменение состояния этого элемента, то линия образует систему первой ступени, поверхность — систему второй ступени и т. д. Совокупность звуков, отличающихся только высотой, образует систему первой ступени, звуки, отличающиеся высотой и силой, образуют систему второй ступени... Таков обширный замысел Грассмана, — к сожалению, слишком обширный, чтобы его действительно можно было выполнить. Постановка вопроса отличается такой общностью, что за нею теряются наиболее важные элементы всякого сочинения, и математического в особенности, — определенность содержания и строгость вывода» [15, т. 2, с. 63].

Грассман был знаком с теорией кватернионов «из вторых рук» — по книге Ганкеля «Теория комплексных числовых систем» (1867) и по статье Дилнера «Опыт нового развития метода Гамильтона, названного исчислением кватернионов» (Math. Annalen. Bd. XI, 1877, s. 168–193); переводы основных руководств по теории кватернионов на немецкий язык были сделаны уже после смерти Грассмана и Ганкеля. В статье «Der Ort der Hamiltonschen Quaternionen in der Ausdehnungslehre» (1877) Грассман пытается показать, что кватернионы могут быть получены как следствие из его теории. Чтобы доказать это, Грассману придется внести некоторые изменения в определения произведений, в частности и такие, которые не свойственны его теории. Однако он считал, что его теория охватывает исчисление кватернионов так же, как и неевклидову геометрию.

Оценки трудов Грассмана очень противоречивы и можно найти диаметрально противоположные мнения: «Труд Грассмана долго не находил заслуживаемого им внимания и не оказал никакого влияния на развитие математики». Это высказывание грассманианцев «первого поколения», Летце и Бетча. Или: «Понятие векторного пространства базируется на $A_1, A_2, \dots$ »

Гиббс, сравнивая исчисления Гамильтона и Грассмана, писал: «Поле приложений грассмановой алгебры точек близко совпадает с тем, в котором тетраэдральные или ангармонические координаты предпочтительнее прямоугольных, если мы используем методы обыкновенной алгебры... Грассмановы методы обогащают новыми понятиями поле, к которому они приложены... Нет сомнений в том, что система Грассмана шире, так как в ней нет ограничений на число измерений» [54, с. 168].

Важной частью A_2 Грассмана является *алгебра точек*. Теория развита для n -мерного пространства. В ней рассматриваются точки с «весами» или точки с числовыми коэффициентами и вводятся операции с ними. Если большие буквы обозначают точки, а маленькие — веса, находящиеся в этих точках, то уравнение

$$aA + bB + cC = dD + eE + fF \quad (9.1)$$

означает, что общие массы $a + b + c$ и $d + e + f$ равны и что две системы имеют центр тяжести в одной и той же точке. Веса

могут быть положительными и отрицательными. Таким образом, уравнение (9.1) эквивалентно четырем уравнениям обычной алгебры.

Произведение двух точек AB представляет собой *линейную величину*, равную отрезку определенной длины, направленному из точки A в точку B и лежащему на фиксированной прямой. Сумма $AB + CD$ отрезков, лежащих на параллельных прямых, равных по длине и противоположно направленных, не обращается в нуль. Эта часть «Учения о протяжении» пересекается с теорией винтов Болла.

Произведение трех точек A, B, C или точки A и отрезка BC (или B и AC) или двух отрезков AB и BC дает *плоскую величину*, под которой понимается треугольник ABC (с «весом», равным удвоенной площади треугольника), который можно перемещать в плоскости точек A, B, C . Если точки A, B, C лежат на одной прямой, то произведение ABC обращается в нуль, т. е. $ABx = 0$ — уравнение прямой AB .

Уравнение

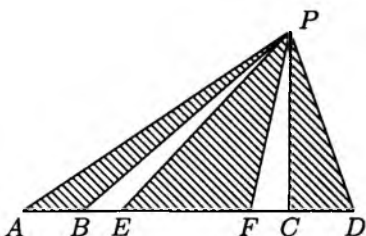
$$ABC + DEF = GHI \quad (9.2)$$

означает, что треугольники ABC, DEF и GHI лежат в одной плоскости, при проектировании треугольников на любую плоскость между их проекциями будет то же соотношение; площади могут быть положительными и отрицательными.

Удивительно, что при формальных операциях с точками легко доказываются содержательные теоремы. Например, пусть справедливо соотношение $AB + CD = EF$. Умножив его на точку P , придем к равенству $ABP + CDP = EFP$, которое означает, что соответствующие площади равны и треугольник EFP , с одной стороны, и система ABP и CDP , с другой, имеют общий центр тяжести.

Наконец, тетраэдр $ABCD$ (с весом, равным $6V_{ABCD}$) можно рассматривать или как произведение плоской величины ABC и точки D (или A и BCD , или B и $ACD \dots$), или как произведение трех отрезков AB, AC, AD , или как произведение четырех точек A, B, C, D и т. д. При этом, очевидно,

$$ABCD = -BACD, \quad \dots, \quad AACD = 0 \dots$$



Из рисунка видно, что доказательство соотношения $ABP + CDP = EFP$ обычными методами аналитической геометрии займет гораздо больше одной строчки

Грассман вводит тетраэдральные координаты. Пусть

$$\begin{aligned} pP &= aA + bB + cC + dD, \\ p &= a + b + c + d. \end{aligned} \quad (9.3)$$

Отношения $a : b : c : d$ определяют положение точки P относительно точек A, B, C, D и т. д. Если умножить соотношение (9.3) на $ABCD$, то получится, очевидно,

$$pABCP = 0 + 0 + 0 + dABCD,$$

откуда

$$\frac{d}{p} = \frac{ABCP}{ABCD}.$$

Таким образом определяются числа

$$\frac{a}{p} = \frac{PBCD}{ABCD}, \quad \frac{b}{p} = \frac{PACD}{ABCD}, \quad \frac{c}{p} = \frac{PABD}{ABCD}.$$

Пусть Q — некоторая точка, такая, что

$$qQ = a'A + b'B + c'C + d'D. \quad (9.4)$$

Произвольный отрезок PQ можно «выразить через ребра» тетраэдра $ABCD$ следующим образом: перемножение (9.3) и (9.4) дает

$$\begin{aligned} pqPQ &= (aA + bB + cC + dD)(a'A + b'B + c'C + d'D) = \\ &= (ab' - a'b)AB + (ac' - a'c)AC + (ad' - a'd)AD + \\ &\quad + (bc' - b'c)BC + (bd' - b'd)BD + (cd' - c'd)CD. \end{aligned}$$

Аналогично «плоскую величину» PQR можно выразить через грани координатного тетраэдра, а $PQRS$ — через его объем.

Рассмотрим пример использования таких координат. Пусть точка G — пересечение прямой AB и плоскости PQR , что обозначается $(AB)(PQR)$. Тогда

$$G = aA + bB = pP + qQ + rR.$$

Рассуждая аналогично, легко получить

$$\frac{a}{BPQR} = \frac{b}{PQRA} = -\frac{p}{QRA B} = -\frac{q}{RABP} = -\frac{r}{ABPQ} = \frac{1}{k}$$

и, следовательно

$$\begin{aligned} kG &= (BPQR)A + (PQRA)B = \\ &= -(QRA B)P - (RABP)Q - (ABPQ)R. \end{aligned}$$

Здесь выражения в скобках играют роль весов, координат, числовых коэффициентов.

Точку $(AB)(PQR)$ можно также представить в виде

$$\begin{aligned} (AB)(PQR) &= (PBQR)A + (PQRA)B = \\ &= (PQRA)B - (PQRB)A \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} &(ABPQ)R - (RABP)Q + (ABQR)P = \\ &= (QRA B)P + (ABPR)Q + (ABPQ)R. \end{aligned}$$

Знак зависит от того, четно или нечетно число перемещений, которые нужно произвести, чтобы переставить букву (A, B, P, Q или R) в конец произведения.

До сих пор произведения имели большую размерность, чем множители. Таким образом, получаются *прогрессивные* произведения. В n -мерном пространстве можно перемножать не более, чем n точек. Если общее число точек во всех множителях превосходит n , умножение становится *регрессивным*, как в только что рассмотренном примере. Прогрессивное произведение двух отрезков — плоская величина. Регрессивное произведение двух отрезков — точка пересечения прямых с весом

$$|AB| \cdot |CD| \cdot \sin \varphi.$$

Регрессивное произведение плоских величин ABC и DEF есть часть прямой линии, по которой пересекаются плоскости ABC и DEF , с числовым коэффициентом

$$2S_{ABC} \cdot 2S_{DEF} \cdot \sin \varphi.$$

Регрессивное произведение плоской величины CDE и линейной AB — точка пересечения прямой и плоскости с весом

$$|AB| \cdot 2S_{CDE} \cdot \sin \varphi.$$

Гиббс отмечает «безмерную приспособляемость и мощь» методов такого анализа, приводит примеры из статики, замечает попутно, что именно здесь (на двадцать лет раньше, чем у Плюккера) в математике впервые появляются линейные координаты, и заключает: «Для физика алгебра точек не является столь необходимым инструментом, как алгебра векторов, но грассманова алгебра точек всегда будет вызывать восхищение геометров и анализистов и доставлять инструмент исключительной силы, применимый к пространству любого числа измерений» [54, с. 168].

При вычитании точек $B - A$ появляются *отрезки*, вполне аналогичные свободным векторам. Эта «алгебра векторов» — органическая часть алгебры точек, но все-таки ее можно выделить из учения Грассмана и рассмотреть отдельно.

Некоторые операции, названные Грассманом «произведениями», вообще говоря, могли бы именоваться по-другому. Видимо, это имел в виду Ганкель, когда писал: «...Законы чисто формальных отношений, которые мы уже по привычке назовем арифметическими операциями, находят здесь реальный, но отвлеченный субстрат; но если бы мы захотели их интерпретировать геометрически, то они могут иметь и свое реальное истолкование» [10, с. 25]. Вероятно, эта черта исследований Грассмана оказалась чрезвычайно важной для рождения аксиоматики.

Итак, познакомимся с той частью теории Грассмана, в которой рассматриваются векторы в n -мерном пространстве.

Грассман вводит «систему единиц» $e_1, e_2, \dots, e_n$, через которые можно выразить все остальные. Эту область исходных e_i ,

из которых все остальные получаются сложением, Грассман называет *основной областью*, а выражение, составленное из единиц системы

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n, \quad \text{или} \quad \sum \alpha e,$$

— *протяженной величиной*.

За базис $e_1, e_2, \dots, e_n$ можно принять любые линейно независимые величины. Можно проследить, как Грассман искал определение линейной независимости величин. В статье 1855 г. он дает нечеткую формулировку: «Я буду говорить, что две или несколько величин имеют арифметическое отношение, если какая-нибудь из них равна многочлену, элементы которого пропорциональны другим из этих величин, так, например,

$$A = \beta B + \gamma C + \dots,$$

где $\beta, \gamma, \dots$ означают обыкновенные числа, рациональные или иррациональные, действительные или мнимые, равные или неравные нулю.

Рассмотрим теперь n величин $A, B, C, \dots$, между которыми нет никакого алгебраического отношения...»

Определение 1861 г. существенно приближается к современному: «Между n величинами $a_1, a_2, \dots, a_n$ существует числовая зависимость (*herrscht Zahlbeziehung*) тогда и только тогда, когда выполняется уравнение

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n = 0,$$

в котором не все числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ равны нулю».

От слова *Einheit* — «единица» — возникло обозначение этих величин через $E_1, E_2, \dots$, а также $e_1, e_2, \dots, e_n$, которое позднее перешло в современную математику. Грассман отмечает, что в n -мерном пространстве существует не более n линейно независимых величин.

Операция сложения протяженных величин подчиняется «фундаментальным формулам», — пишет Грассман:

- 1) $a + b = b + a$;
- 2) $a + (b + c) = a + b + c$;

$$3) a + b - b = a;$$

$$4) a - b + b = a.$$

Что касается произведений, то «если единиц e_i всего n , существует n^2 попарных произведений $[e_1e_1], [e_1e_2], \dots, [e_ne_n]$. Произведение отмечено скобками, чтобы отличить его от алгебраического произведения».

Эти квадратные скобки сначала позаимствовал Гиббс, который заключал скалярные коэффициенты в круглые скобки, векторные величины — в квадратные:

$$(a + b)[\alpha + \beta] = a[\alpha + \beta] + b[\alpha + \beta].$$

Затем в английском переводе книги немецкого математика О. Хенрики (1903) появились обозначения $()$ и $[]$ для скалярного и векторного произведений.

При перемножении протяженных величин могут рассматриваться две возможности:

$$1. [e_re_s] = [e_se_r];$$

$$2. [e_re_s] + [e_se_r] = 0, \quad \text{т.е.} \quad [e_re_s] = -[e_se_r] \quad \text{и} \quad [e_re_r] = 0.$$

В первом случае произведение обладает всеми свойствами «обычного», поэтому Грассман называет его *алгебраическим*; произведение второго вида он называет *комбинаторным*. Всего во втором варианте его учения о протяжении (A_2) 16 видов произведений. Свойства 1 и 2 выполняются для *внутреннего* и *внешнего* произведений.

Внутреннее произведение (в случае, когда перемножаются два отрезка) тождественно скалярному произведению векторов n -мерного пространства, а в самом общем случае является аналогом свертки контра- и ковариантного тензоров. Термины *внутреннее* и *внешнее* произведения довольно долго удерживались в математике (а «внешнее» увековечено во «внешних формах» Картана).

Грассман так объяснял смысл названия: «Я выбрал название *внешнее произведение*, чтобы отметить, что произведение только тогда имеет смысл, когда один сомножитель лежит совершенно

вне области других», — т. е. один сомножитель не должен являться линейной комбинацией остальных. Для нашего векторного анализа это означает, что в случае произведения двух векторов «внешнее произведение» — число, равное площади параллелограмма, построенного на этих векторах, в случае произведения трех векторов — это число, равное объему параллелепипеда, и т. д. Когда идеи Грассмана переводят на современный язык, то несколько модернизируют и идеи, например, внешнее произведение смешивают с прогрессивным произведением. У Марколонго «внешнее или векторное произведение» — одно и то же.

И внутреннее, и внешнее произведения в теории Грассмана — скалярные величины, что позволило ввести «среднее произведение» — линейную комбинацию внутреннего и внешнего произведений с произвольными постоянными коэффициентами λ и μ .

Для внутреннего произведения единиц Грассман полагает

$$[e_r e_r] = [e_s e_s] = \dots = 1, \quad [e_r e_s] = 0,$$

т. е. от произвольных единиц он переходит к ортонормированному базису. Внешние произведения протяженных величин вычисляются по формулам:

$$[ab] = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} [e_1 e_2], \quad \dots,$$

$$[a_1 a_2 \dots a_n] = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_1 & \omega_2 & \dots & \omega_n \end{vmatrix} [e_1 e_2 \dots e_n]$$

и

$$[e_1 e_2] = 1, \quad [e_1 e_2 e_3] = 1, \quad \dots, \quad [e_1 e_2 \dots e_n] = 1.$$

Понятие ортогональности Грассман вводит для любых величин, используя внутреннее произведение, т. е. совершенно так же, как через скалярное произведение вводится понятие ортогональности в функциональном анализе, например. «Нормальными друг другу называются две величины, отличные от нуля, внутреннее произведение которых равно нулю. Я выбрал слово normal

вместо *senkrecht* как более абстрактное, применимое не только к пространственным соотношениям» [56, с. 112].

В теории Грассмана фигурирует «дополнение внешнего произведения» $[ab]$ — отрезок, ортогональный плоскости параллелограмма, площади которого равно внешнее произведение. Внешнее произведение и его дополнение, естественно, по-разному преобразуются при линейных преобразованиях.

До сих пор речь шла о величинах вида $\sum \alpha_r e_r$, которые Грассман называл *протяженными величинами первой ступени*. При перемножении таких величин получается протяженная величина второй ступени и т. д. В этом — основное отличие от операции умножения теории кватернионов: в теории Гамильтона результат умножения — кватернион (который в частных случаях может вырождаться в чисто скалярную или чисто векторную величину). Другими словами, теория кватернионов — ассоциативная алгебра, в ней результат произведения выражается через исходные единицы $1, i, j, k$; линейное учение о протяжении — неассоциативная алгебра, в ней произведение есть величина другой природы, нежели множители.

Ганкель пытался объяснить причины полного игнорирования этой работы Грассмана: «Если в первом сочинении, A_1 , изложение своей... философской внешностью и своей необычной формальной операцией над величинами, не обладающими характером величин, употребляемых в простой арифметике, до некоторой степени отпугивает математика, то в последнем сочинении, A_2 , вполне сохранена привычная математику форма. Что же касается того обстоятельства, что несмотря на все это, исследования гениального ученого не нашли всеобщего признания... то, по-моему, это нужно приписать тому обстоятельству, что автор придал своим выводам самую общую форму (автор брал пространство n измерений), чем наглядность и понимание необыкновенно сильно затруднены» [10, с. 25–26].

Таким образом, Грассман «...пережил то, что является самым горьким для автора новой работы: к его книге нигде не отнеслись с вниманием; не было никого, кто обсуждал бы ее или даже публично обнаружил бы в ней ошибки. Математики, кото-

рым он послал работу, не выразились недружелюбно, некоторые даже снизошли до благожелательности, но ни один не изучил ее на самом деле» [51, с. 47].

Вероятно, истинной причиной непонимания учения Грассмана (кроме «нечитабельности») было то обстоятельство, что он намного обогнал свое время — ведь не излагал же Гаусс десятилетиями созданные им теории.

Приходится признать, что большее влияние Грассман оказал на создание аксиоматических методов современной математики и метода внешних форм Картана.

В 70-х гг. XIX в. во французской литературе встречаются ссылки на книгу Ганкеля, так что имя Грассмана становится известным. Эли Картан уже в 90-х гг. связал идею внешнего произведения в n -мерном пространстве с методами Фробениуса, развитыми в статьях о билинейных формах. В 1896 г. Картан заметил, что грассманово внешнее произведение

$$du = A dx + B dy \quad \text{и} \quad dv = C dx + D dy$$

дает

$$du dv = \frac{\partial(u; v)}{\partial(x; y)} dx dy.$$

Труды Фробениуса быстро стали классикой. Сжатое до двух страниц сообщение (выдержка из его письма к Эрмиту) о его исследованиях появилось в «Comptes Rendus». Здесь Фробениус представляет свою работу как развитие идей Эрмита, во всяком случае, он оговаривает: «...то, что Вы часто используете...» и т. п. В большой статье «О линейных подстановках в билинейных формах» (1878) он связывает идеи Эрмита, Кэли, Кристоффеля, Якоби... Фробениус предполагает рассматривать лишь такие операции с билинейными формами, в результате которых получаются вновь билинейные формы. «На этом основании не может возникнуть никакого недоразумения, если я обозначу через AB форму P , составленную по A и B таким образом:

$$AB = \sum_1^n \frac{\partial A}{\partial y_k} \cdot \frac{\partial B}{\partial x_k},$$

и назову ее *произведением* форм A и B , а их — множителями формы P ».

Далее он формулирует свойства такого произведения:

а) Дистрибутивность:

$$A(B + C) = AB + AC,$$

$$(A + B)C = AC + BC,$$

$$(A + B)(C + D) = AC + AD + BC + BD(aA)B = \\ = A(aB) = a(AB),$$

$$(aA + bB)C = aAC + bBC.$$

б) Ассоциативность:

$$(AB)C = A(BC).$$

в) Вообще говоря, некоммутативность.

Если $AB = BA$, формы называются *перестановочными* (vertauschbar).

Именно в этой статье Фробениус ввел общепринятые ныне термины *характеристическое уравнение, характеристический детерминант*.

Последние страницы статьи — «§ 14. Комплексные числа». Постановка задачи — совершенно естественна: так как Пирс доказал, что всякая система гиперкомплексных чисел эквивалентна алгебре матриц, и выписал матрицы, «соответствующие» теории кватернионов, то обобщение теории на случай алгебры с n единицами, следовательно, должно включать этот результат Пирса как частный случай. Фробениус просто записывает соотношения между коэффициентами билинейных форм A , B и P и заключает: «Легко построить все возможные системы комплексных чисел... Мы пришли к результату, что кроме действительных чисел... мнимых чисел... и кватернионов... не существует никаких других комплексных чисел (в определенном выше смысле)».

После работы Фробениуса такой прием, возникший под влиянием Бенджамена Пирса и его сына Чарлза Пирса, стал классикой. Свойства, доказываемые путем таких рассуждений, появляются как исключительные. Так, Гурвиц доказал в 1898 г., что

тождества вида

$$\left(\sum_{j=1}^n x_j^2\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n y_j^2\right) = \sum_{j=1}^n \chi_j^2$$

между действительными числами, где каждое χ_j есть билинейная форма относительно x_j, y_j с действительными коэффициентами, может выполняться, только если n — одно из чисел 1, 2, 4 и 8.

Весь этот аппарат был существенно использован Картаном, который названиями *внешняя форма*, *внешнее умножение* подчеркивал роль учения Грассмана. Его теория развита и изложена таким образом, что постоянно подчеркиваются «анalogии между классическими квадратичными формами и внешними квадратичными формами».

Когда позднее Картан ввел понятия *внешняя производная* (а потом он стал говорить «внешний дифференциал») и *высшая производная*, он исходил из другой статьи Фробениуса «О проблеме Пфаффа» (1877). Подход Картана, глубокий и плодотворный, оказал огромное влияние на развитие многих областей математики, в том числе внешних алгебр Грассмана. Работы Картана возбудили интерес к трудам Грассмана. Они положили начало развитию внешних алгебр Грассмана.

Итак, в некоторой степени оправдались надежды Грассмана:

«Я твердо уверен, что работа... не будет потеряна... что если этому сочинению и суждено в течение еще новых 17 лет или более пролежать праздным, не захватываемым текущим развитием науки, то все-таки придет время, когда его извлекут из пыли забвения и изложенные в нем идеи станут приносить плоды» («Предисловие» к A_2).

Глава 10

**«Задача,
поставленная
Лейбницем, решена!»**

Дж. Пеано

Выдающийся итальянский математик Джузеппе Пеано оказал существенное влияние на развитие математического анализа, математической логики, оснований математики — арифметики и геометрии. Имя его связано с такими понятиями, как кривая Пеано, остаточный член в форме Пеано, аксиомы

Пеано... А влияние Пеано на формирование курса математического анализа было признано еще при его жизни. А. Прингсхейм в статье в «Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften» назвал среди девятнадцати наиболее важных учебных курсов дифференциального и интегрального исчисления (за период до конца XIX в.) два учебника Пеано: «Курс Дженокки» (1884) и «Лекции по инфинитезимальному анализу» (1893). Последний (двухтомный труд) содержал мало новых теорем, но



Дж. Пеано

сразу же стал классическим, благодаря четкости и ясности изложения и уровню математической строгости.

Джузеппе Пеано родился в семье крестьянина на северо-востоке Италии (в 50 милях от Турина). Он был вторым ребенком в семье (кроме него было еще четверо детей). Благодаря дяде, священнику и юристу в Турине, мальчик после окончания начальной школы переехал в Турин (в 1870 или 1871 г.).

Несмотря на влияние своего дяди, а также брата, который стал священнослужителем, Пеано отошел от католической религии. В 1876 г. он поступил в Туринский университет — один из старейших университетов (его открыл антипапа Бенедикт XIII в 1404 г.). В 1880 г. физико-математическое отделение университета окончили только два человека, одним из них был Пеано. Получив диплом доктора наук, он остался работать в родном университете.

В 1882–1884 гг. Пеано читал лекции по «инфинитезимальному исчислению» вместо заболевшего проф. Анжело Дженокки. Пеано обнаружил одну из самых сильных своих сторон — «способность заметить логический пробел... выявить основную трудность в теоремах, определениях... сделать теоремы строгими, корректируя их формулировки» [65, с. 15].

Первая большая публикация Пеано — курьез в истории науки: на титульном листе стоит имя Дженокки. Издательство предполагало выпустить учебник по математическому анализу, написанный Дженокки. Из-за его тяжелой болезни за работу взялся Пеано. Впоследствии он писал: «Я использовал студенческие конспекты его лекций, сравнил их пункт за пунктом со всеми основными учебниками исчисления, а также с оригинальными статьями... Вследствие этого я сделал много добавлений и произвел некоторые изменения в его лекциях, хотя эти добавления напечатаны мелким шрифтом и не значатся под моим именем...»

Эта книга на десятилетия определила стиль преподавания математического анализа, ее влияние ощущается и в современных учебниках.

Карьера Пеано связана с Туринском:

в 1881 г. Пеано — ассистент Дженокки,

с 1884 г. — приват-доцент в университете,

с 1886 г. — профессор Королевской Военной академии и преподаватель университета (как сообщает Кеннеди, здание Военной академии находилось наискосок от университета, и университетские профессора часто преподавали и там).

В 1887 г. Пеано женился на Кароле Крозио — дочери художника. Вероятно, это была не совсем обычная семья: жена была из артистической семьи, любила музыку, а муж мог заснуть в опере... у них не было детей и было много собак; в доме не было плиты, но был камин; никогда не было телефона...

По воспоминаниям людей, знавших Пеано, он не выглядел «импозантной персоной», хотя внушал уважение; он имел грубоватый голос и не выговаривал «р». Ученики Пеано преклонялись перед своим учителем и восхищались им. Впоследствии все они писали о «его любви к молодежи, о простоте и честности его жизни».

Признание Пеано на родине пришло уже через 10 лет после начала его научной и педагогической деятельности. В 1901 г. Пеано был пожалован в члены Ордена Св. Маврикия и Лазаря, который был основан в 1572 г., главным образом, для борьбы с пиратами. В 1905 г. он был избран членом Академии деи Линчеи (Академии рысьеглазых) — это одно из высших отличий для итальянских ученых. Академия основана в 1603 г., членом этой Академии стал Галилей (во время визита в Рим в 1611 г.).

Большое место в жизни Пеано занимала издательская деятельность — он выпускал журнал «Математическое обозрение» («*Rivista di matematica*») и сборники «Формулы математики» («*Formulario di matematica*»), которые «отпочковались» от журнала.

Любопытная деталь: Пеано купил печатный станок (за 407 лир) у Франческо Фаа ди Бруно, который в 1971 г. был причислен к лику святых (Кеннеди приводит ссылку на документ о беатификации и канонизации его). Не менее интересно, что Фаа ди Бруно в свое время учился у Коши и на всю жизнь сохранил восхищение математическим гением, религиозностью и филантропией Коши, а Пеано гордился тем, что в Турине никогда ничего не печатали из трудов Коши!

Первый номер журнала вышел в 1891 г. Несколько учредителей помогали финансировать первый том; официальным директором, вдохновителем и исполнителем большей части практической издательской работы был Пеано. В журнале публиковались в основном работы Пеано и его учеников. К 1891 г. относится и первый проект сборников «Формулы математики» (последнее, пятое, издание вышло в 1908 г.). В этих сборниках Пеано предполагал собрать все известные теоремы по различным математическим дисциплинам с доказательствами и историческими справками. Его целью было создать универсальное пособие для преподавания математики в университетах, изложенное на языке математической логики. Он так рекомендовал этот труд: «Каждый профессор может взять „Formulario“ в качестве учебника, который будет содержать все теоремы и все методы. Его преподавание сведется к показу того, как читать формулы, и к указанию студентам тех теорем, которые он хочет объяснить в своем курсе» [65, с. 66]. К разочарованию Пеано, за ним последовала лишь небольшая часть итальянских математиков — главным образом, его ученики, на которых действовало обаяние личности учителя. Как пишет Кеннеди, «Апостольское рвение Пеано распространить язык математической логики в аудитории и в научные статьи вскоре начало поглощать все его способности» [65, с. 45].

Стремление Пеано вести преподавание на базе математической логики не нравилось ни студентам, ни преподавателям. Возникшие трения вынудили его уйти из Военной академии. Неприязнь пережила Пеано — пока в комиссии по изданию его трудов входил Трикоми, дело не продвинулось ни на шаг. Возможно, этим же объясняется и то, что единственную книгу о Пеано написал Х. Кеннеди, американский математик, который учился в 1957–1959 гг. у Кассины — ученика Пеано. И только в 1953–1959 гг. были изданы «избранные труды» Пеано в трех томах.

Пеано принимал активнейшее участие во всевозможных съездах, конференциях, обсуждениях и в связи с этим много путешествовал. Он был одним из организаторов международных математических конгрессов. Пеано входил в организационный комитет Первого Международного философского конгресса



У. Кассина

(немецких философов на нем представляли Г. Кантор, М. Кантор, Р. Дедекинд, Э. Шредер и др.). На следующий день после окончания работы философского конгресса открылся Второй Международный математический конгресс. Несмотря на присутствие названных ученых, Пеано был самой яркой фигурой на конгрессе. Как вспоминал Б. Рассел, «Конгресс стал поворотной точкой в моей интеллектуальной жизни, потому что я встретил там Пеано, которого раньше знал только по имени и по работам...

На конгрессе я заметил, что в дискуссиях он всегда был более точен, чем кто-либо, и что он неизменно приводил лучший из всех возможных аргументов» [65, с. 91].

Пеано был также участником конференций, посвященных методике преподавания. Известно принципиальное несогласие Пеано с системой экзаменов. Одна из его статей так и называлась «Долой экзамены!» Его установка: «Жизнь его проэкзаменует».

1902 г. ознаменовался началом нового увлечения Пеано: созданием международного вспомогательного языка *interlingua*. Вероятно, он отдал дань моде — с конца XIX в. до первой мировой войны было особенно сильным движение за искусственные языки. В 1879 г. был опубликован язык *волапюк*, его автор — священнослужитель Мартин Шлеер; в Турине клуб «Волапюк» существовал с 1888 г., и в 1908 г. его президентом был избран Пеано. Еще одним толчком к *interlingua* могло послужить знакомство с автором *эсперанто* — Заменгофом, который считал Пеано «очень способным эсперантистом».

Язык, предложенный Пеано, назывался *latino sine flexione* и представлял собой упрощенную форму латыни, «латынь без окончаний» или «латынь без грамматики». Эта страсть целиком поглотила Пеано, все силы ума были сконцентрированы на *interlingua*, создание которого Пеано считал научной проблемой. Коллеги-математики не разделяли его энтузиазма, одни считали,

что математика имеет свой собственный язык, другие — что язык будущего — английский.

Пеано сохранил работоспособность, живой интерес и активность до последнего дня жизни. 20 апреля 1932 г. он скончался.

Пеано дал такую оценку своим трудам (которая, если и грешит, то только чрезвычайной скромностью): «Мои работы относятся, в основном, к инфинитезимальному исчислению, и они не были совершенно бесполезными, так как по компетентному мнению они повлияли на сегодняшнее строение этой науки». Слова о компетентном суждении относятся, в первую очередь, к статье Прингсхейма в немецкой математической энциклопедии. Как пишет автор научной биографии Пеано — Кеннеди: «Многое из математических работ Пеано имеет сегодня лишь исторический интерес, но в современном уровне строгости математики и ее преподавании требования Пеано... сохранились и редко перекрываются более сильными» [65, с. 10].

В самом деле, вот примеры: Пеано обратил внимание на неточность определения площади поверхности как предела площадей поверхностей вписанных многогранников (данного Серре в 1868 г. в «Calcul integrale» и повторяемого во всех курсах математического анализа того времени). Пеано предложил корректное определение (1882). Эквивалентное определение дал Шварц (сообщивший об этом Дженокки в конце 1880 г.). Дженокки написал Шварцу о достижении своего ученика, а Эрмиту — об определениях Шварца и Пеано. Эрмит включил это определение в литографированные лекции (1883), а затем в свою книгу со ссылками на авторов. В современных учебниках определение иллюстрируется «примером Шварца».

Пеано привел пример функции

$$f(x, y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \quad f(0, 0) = 0,$$

для которой

$$f''_{xy} \neq f''_{yx} \quad \text{в точке} \quad O(0, 0).$$

До этого принимали «теорему Эйлера», по которой смешанные частные производные функции равны... Этот пример до сих пор переходит из учебника в учебник.

Пеано предложил аналитическое выражение для функции Дирихле, что казалось вообще невозможным многим математикам (так считал, например, Фреге).

Сам Дирихле привел свой знаменитый пример впервые в статье от 1829 г. Функция описана словами: $\varphi(x)$ принимает постоянные значения c и d соответственно при рациональном и иррациональном значениях x . В статье 1837 г. Дирихле привел суммы

$$\cos(m-h)\frac{\pi}{n} + \cos 2(m-h)\frac{\pi}{n} + \dots + \cos(n-1)(m-h)\frac{\pi}{n},$$

$$- \left[\cos(m+h)\frac{\pi}{n} + \cos 2(m+h)\frac{\pi}{n} + \dots + \cos(n-1)(m+h)\frac{\pi}{n} \right],$$

которые равны соответственно -1 или 0 , $+1$ или 0 в зависимости от четности или нечетности $(m-h)$, $(m+h)$.

Пеано считал, что он приводит «...замечательный пример разрывности. Полагая

$$\varphi(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 + t^2} \quad \text{при } t \rightarrow 0,$$

имеем

$$\varphi(x) = 1 \quad \text{при } x \neq 0 \quad \text{и} \quad \varphi(0) = 0.$$

Тогда функция от x , равная $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(\sin n! \pi x)$, где k пределу подходим, давая числу n целые положительные значения, беспрестанно возрастающие, будет равна нулю при всяком рациональном x , а при иррациональном — равна 1» [16, с. 340]. После этого определения аналитическое выражение функции Дирихле

$$y = (c-d) \lim_{n \rightarrow \infty} (\lim_{m \rightarrow \infty} \cos n! \pi x^m) + d,$$

принимавшей значения c и d , $n \rightarrow \infty$ и $m \rightarrow \infty$, данное Альфредом Прингсхеймом в 1899 г., кажется не столь поразительным, как при первом знакомстве. В дальнейшем были изобретены и другие формы.

Приведем примеры некоторых «стандартных, привычных» (чтобы не сказать «ставших классическими») определений, примеров, приемов, введенных в курс анализа Пеано. В курсе «Гео-

метрические приложения анализа» (1887) впервые дано выражение остаточного члена ряда «в форме Пеано».

Пеано уточнил определение меры точечного множества (1887); Жордан сформулировал эквивалентное определение в 1892 г.

В статье Пеано (1887) используется метод последовательных приближений в дифференциальных уравнениях (названный им *методом последовательных интегрирований*) — Пикар дал первые примеры приложения метода к дифференциальным уравнениям в 1888 г. По-видимому, основательно было забыто, что метод применялся для этих целей Жозефом Лиувиллем.

В «Геометрических приложениях» была дана формула Пеано для приближенного вычисления длины эллипса:

$$\pi(a+b) + \frac{1}{2}\pi(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2.$$

К аналогичной формуле, а именно

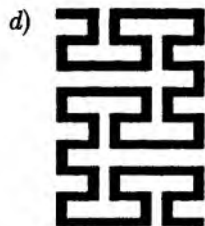
$$\pi\left(3\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}\right),$$

пришел независимо Бусинеск.

В знаменитой статье «О кривой, которая заполняет всю плоскую область» (1890) Пеано привел пример аналитически заданной непрерывной кривой, проходящей через каждую точку квадрата. Сразу же последовали статьи Д. Гильберта (1891), Э. Чезаро (1897), А. Лебега (1900, 1904) с аналогичными построениями. Затем Пеано предложил еще и геометрическое определение своей кривой как предела последовательности некоторых кривых (одна из кривых последовательности была изображена на вранде его виллы! — этим своим изобретением он, явно, был доволен). Напомним, что в 1877 г. Кантор доказал, что можно установить взаимно однозначное соответствие между точками отрезка $[0; 1]$ и точками квадрата, а первая *кривая Пеано* построена в 1890 г. Рушились представления о размерности: считалось очевидным, что если между элементами двух «систем» существует взаимно однозначное соответствие, то «системы» одной размерности.

$$a) \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{array}$$

$$b) \begin{array}{ccc} 2 & 3 & 8 \\ 1 & 4 & 7 \\ 0 & 5 & 6 \end{array}$$



Построение кривой Пеано (из его первой публикации)

В статье 1886 г. Пеано доказал теорему существования решения дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$. Коши требовал непрерывность и дифференцируемость функции $f(x, y)$; его доказательство несколько упростили Брио и Буке (1855), Р. Липшиц (1868), В. Вольтерра (1880). Пеано нашел, что для доказательства существования решения достаточно только непрерывности функции $f(x, y)$.

Пеано принадлежит теорема о существовании и дифференцируемости неявной функции. Разделы современных учебников, посвященные формуле Тейлора для функции нескольких переменных и основанному на этом разложении исследованию экстремума этой функции, дословно повторяют страницы учебников Пеано. Эйлер полагал достаточными условиями:

$$f''_{xx} > 0, \quad f''_{yy} > 0.$$

Формулируя аксиоматическое определение линейного векторного пространства (1888), Пеано привел примеры, иллюстрирующие понятие и подтверждающие, что самые разные теории допускают единое изложение.

Понятию линейной независимости он посвятил специальную статью «О вронскиане» (1889), где показал, что обращение определителя Вронского в нуль не достаточно для линейной зависимости функций: функции $y = x^2$ и $y = x|x|$ непрерывны,

$$W[y_1, y_2] = 0,$$

но нет чисел C_1, C_2 , таких, что $C_1 y_1 + C_2 y_2 = 0$ всюду.

В 1890 г. Пеано отметил, что процедура «...возьмем произвольную точку...» не столь безобидна, как это кажется на первый взгляд. Иначе говоря, он стал первым противником аксиомы Цермело еще за 15 лет до того, как она была сформулирована в явном виде самим автором. Несмотря на «признанный факт», что у сторонников и противников аксиомы выбора разная логика и между ними не может быть споров, Пеано и Цермело спокойно и доброжелательно беседовали при встречах на международных конференциях и конгрессах.

Приведенных примеров достаточно, чтобы убедиться, что мысли Пеано «живут» в математическом анализе, и удивиться тому, как мог такой изоциренный ум втискивать преподавание в прокрустово ложе «Формул математики».

И еще одно замечание. Совершенно справедливо исследуется вопрос о роли Пеано в появлении «бурбакизма» («Peano ed il Bourbakismo», Segre B. в кн. «In Memoria di Giuseppe Peano», 1955). Первые симптомы «болезни» появляются в книге, связанной самым непосредственным образом с векторным исчислением.

В 1888 г. вышла работа Пеано «Основы геометрического исчисления по „Ausdehnungslehre“ Германа Грассмана с предварительно изложенными операциями дедуктивной логики» (*Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann preceduto dalle operazioni della logica deduttiva*). Три части этого издания почти не связаны между собой; они представляют вехи в творчестве Пеано: «Logica...» — первый труд Пеано по математической логике, под знаком которой проходят два десятилетия его жизни и которая, как мы увидим, наложила отпечаток на всю дальнейшую математическую и преподавательскую деятельность Пеано; «Calcolo geometrico...» открывает ряд исследований по геометрии, а «Приложение» — по основаниям геометрии, по аксиоматике (геометрии и арифметики).

Этот знаменательный факт — объединение в одном труде, казалось бы, совершенно разнородных работ — был, по-видимому, совершенно естественным шагом для Пеано, который и «математическую логику» и «геометрическое исчисление» считал

развитием идей Лейбница. Вероятно, Пеано полагал, что основная задача математики — создать единые правила оперирования с элементами (или «сущностями», «объектами» — *enti*); с этой точки зрения «математическая логика» и «геометрическое исчисление», так сказать, неразличимы. В подтверждение этой догадки приведем (почти полностью) статью Пеано «Самая общая задача математических наук» (1896):

«Лейбниц, который дал основные правила инфинитезимального исчисления и который занимался геометрическим анализом, напоминающим теорию векторов, в течение всей своей жизни (начиная со своих первых работ и кончая последними письмами), хотел создать „универсальную характеристику“ или „общий метод, с помощью которого доказательства всех истин сводились бы к некоторому виду вычислений“. Он громоздит похвалы этому проекту и говорит, что „нет человека, будь он даже пророк или властитель, который смог бы предпринять что-либо более благотворное для человечества“. Таким образом, согласно Лейбницу, самая общая задача, которая может быть поставлена, состоит в построении такой характеристики.

Ныне, после многочисленных исследований нескольких авторов, особенно Буля и Шредера, задача решена. Все идеи логики выражаются посредством малого числа знаков, с которыми мы оперируем как со знаками алгебры $+$, $-$, $=$, $\dots$ » [73, с. 189].

О работах Пеано по математической логике заметим только, что их лишь «с кровью» можно вырвать из математического контекста, так как для Пеано (повторим еще раз) математическая логика являлась не объектом изучения, а средством (исследования и изложения), как он сам заявил, сравнивая свой «*Formulario di matematica*» и «*Principies of Mathematics*» Уайтхеда и Рассела. «В „*Formulario*“ математическая логика изложена на 16 страницах, так как она — не самоцель, а средство для выражения и рассмотрения обычной математики».

Пеано с чувством удовлетворения и гордости писал: «... через два века... мечта изобретателя инфинитезимального исчисления становится реальностью... Мы имеем теперь решение проблемы, поставленной Лейбницем!»

В символике Пеано впервые появились знаки $\in$, и $\supset$ в форме ϵ и $\supset$ (1889). Знак ϵ — первая буква греческого слова $\epsilon\sigma\tau\iota$ — «есть», «быть»; $\supset$ — перевернутая первая буква итальянского слова *Correspondenza* — «соответствие», — означала «соответствует», «следует». Рассел в 1903 г. превратил эти символы в современные $\in$ и $\supset$. Символ $\exists$ для квантора существования Пеано ввел в 1896 г. (от *Exister* — «существовать»). От его же обозначений $\vee$, $\wedge$ («или», «и») произошли и современные $\cup$, $\cap$.

Для того чтобы читать работы Пеано (и его журнал), нужно было освоить изобретенную им символику (что было совсем не так просто и естественно, как ему казалось). Приведем в качестве примера два (из четырех) постулата, вводящих понятие *между*. Точки обозначены маленькими буквами; точки, лежащие на прямой p между a и d , образуют «отрезок», обозначаемый Пеано через ad .

II.VIII. $a, d, \epsilon p. c \epsilon ad. b \epsilon ac. \supset : b \epsilon ad$.

II.IX. $a, d \epsilon p. b, c \epsilon ad. \supset : b \epsilon ac. \cup . b \epsilon cd. \cup . b = c$ [71, с. 122].

Здесь сформулированы аксиомы:

«II.VIII. Пусть точки a, d принадлежат прямой p , точка c принадлежит отрезку ad , а b — отрезку ac ; тогда следует: точка b принадлежит и отрезку ad .

II.IX. Пусть точки a, d принадлежат прямой p , а точки b, c принадлежат отрезку ad ; тогда следует: или точка b принадлежит отрезку ac , или точка b принадлежит отрезку cd , или $b = c$ ».

В. Ф. Каган так характеризовал логико-математическую символику Пеано:

«...Пеано полагает, что обычное словесное выражение математических выводов не может гарантировать строго формального характера вывода. Он придумал поэтому особую идеографию, согласованную с его взглядами на математическую логику, которая при помощи небольшого числа символов должна выражать математические предложения и их выводы. Специальный журнал „Rivista di Matematica“ должен был проводить эти идеи и распространять их среди математиков: журнал содержал почти

исключительно статьи, написанные в идеографии Пеано. Нужно сказать, что эта идеография не встретила сочувствия среди математиков и вряд ли таковое заслуживает. Доказательства Пеано отнюдь не представляют собой выводов, механически производимых на основании известных формальных законов, как того требует формальная логика; идеография Пеано — это те же слова, иначе обозначенные, но требующие изучения символистики, далеко не такой простой, как она кажется Пеано... Но если идеография Пеано еще не сыграла значительной роли, то его тонкий ум, глубоко проникающий в мельчайшие детали вывода, сыграл значительную роль в деле обоснования математики» [20, с. 497]. Прошедшие десятилетия (а теперь уже столетие) показывают, что в этом отзыве Вениамина Федоровича лишнее только одно слово — «еще».

Современная точка зрения на систему аксиом математической теории как на определения элементарных понятий этой теории и одновременно — точное и полное описание тех соотношений, которые существуют между этими понятиями, сформировалась в короткий период между 1882 и 1889 гг. Это даты выхода в свет двух сочинений: «Лекции по новой геометрии» Морица Паша и «Логически изложенные принципы геометрии» Джузеппе Пеано.

«Лекции по новой геометрии» Морица Паша занимают совершенно исключительное место среди трудов по основаниям геометрии. «Эта книга не имеет предшественников, но имеет много последователей», — писал о ней М. Ден, развивший неархимедову геометрию. Самым существенным было то, что Паш принял существование *первичных понятий* (*primitiven Begriffe*) и *фундаментальных положений, постулатов* (*Kernsätzen*), с помощью которых логически доказываются теоремы, исключительно как логические соотношения, а также то, что он сформулировал аксиомы, которые характеризуют понятие *между, внутри* и которые устанавливают расположение точек на прямой. Он показал впервые, что геометрия порядка может быть построена без измерений: задача решается аксиомой Паша.

В первом варианте аксиоматики Пеано (1889) первичными понятиями были *точка* и *отрезок*, а метрика вводилась при по-

мощи движения. В дальнейших трудах Пеано (1895, 1898, 1902) первичными понятиями являлись *точки* и *векторы*. Цель его работы — строго формально развить некоторую часть геометрии, а именно: установить взаимное положение точек, прямых и плоскостей в пространстве. «Это небольшое сочинение должно быть признано первым, в котором часть геометрии развита действительно „строго формально“, — так оценивает В. Ф. Каган работу и далее заключает, — К сожалению, это небольшое сочинение, написанное в идеографии, почти никому не известной, получило очень малое распространение и еще в настоящее время <1905> редко кому знакомо. Но ученики Пеано усвоили его идеи и довели их до полного обоснования проективной геометрии» [20, с. 501]. Марио Пиери «предложил систему посылок... достаточную для обоснования аффинной евклидовой геометрии... его сочинения глубоко продуманы и оригинально объединяют лучшие идеи предшествующих авторов», и «за Пиери еще одна существенная заслуга. Он первый ставит вопрос о независимости посылок» [20, с. 512, 527]. Интересно добавить суждение Пеано о работах его ученика: он считал, что работы Пиери составили эпоху в изучении оснований геометрии.

Другой ученик — Федерико Амодео в статье 1891 г. сделал попытку обосновать проективную геометрию пространства любого числа измерений. И, наконец, еще один ученик — Алессандро Падоа — продолжил исследования Пеано о независимости аксиом системы и изучил вопрос о несводимости первоначальных понятий. Падоа изобрел (около 1889 г.) технический прием (который в настоящее время называется *методом Падоа*), состоящий в конструировании моделей. Отметим, правда, что отдаленные намеки на такую идею есть у Паша: «...если геометрия истинно дедуктивна, то процесс умозаключений должен совершенно не зависеть от *значения* геометрических терминов так же, как он не зависит от фигур» [66, с. 98].

В 1899 г. вышла книга Гильберта «Основания геометрии», до нее исследования математиков итальянской школы были мало известны (отчасти из-за «идеографии» Пеано). Книга была встречена с необыкновенным энтузиазмом... Очень скоро после-

довали критические замечания, разбор недостатков, указания на приоритет итальянских математиков. В частности, очень хорошо были аргументированы возражения В. Ф. Кагана, представившего свою собственную систему аксиом.

Для Гильберта «не существовало» все, что изобреталось за пределами Геттингена, — даже о работах своих уехавших учеников он не упоминал (например, А. О. Гельфонда, А. Тарского), тем более он не ссылаясь на работы Фредгольма, Пеано... Кажется, его примеру следовали и близкие ему ученики — Э. Шмидт, Г. Вейль. Правда, Ф. Рисс ссылаясь на труды Фреше, Пеано (когда писал статьи в Париже или в Венгрии). А вот широко известная в настоящее время *аксиоматика Вейля* приведена без единого слова о работах Пинкерле и Пеано, из которых она взята. Допустим, это можно оправдать характером книги «Пространство. Время. Материя», которая представляет собой переработанные лекции. Но вот Вейль пишет о своем учителе: «Если я не ошибаюсь, Гильберт — первый из тех, кто свободно парил на этом высочайшем „метаматематическом“ уровне: систематически он изучал взаимную независимость аксиом и решал вопрос независимости некоторой ограниченной группы аксиом для некоторых наиболее фундаментальных теорем. Его метод — *конструирование моделей*: если обнаруживается противоречие с одной аксиомой и согласованность всех остальных аксиом, то первая аксиома не может быть следствием других». Кеннеди возражает: «Этот метод изобретен и уже систематически использовался Пеано, хотя, читая Гильберта, мы не узнаем этого. В „Grundlagen der Geometrie“ нет никакого упоминания о Пеано...» [66, с. 135].

Исследования Пеано по математической логике, основаниям геометрии и основаниям арифметики, естественно, органически связаны. В области арифметики Пеано признавал влияние Грассмана. Приведем оценку книги Грассмана, данную Каганом: «Арифметика Грассмана сыграла очень важную роль. Это было первое сочинение, в котором теория рациональных чисел была построена строго научно и формально. Особенную цену имеет то, что Грассман выяснил важное значение, которое имеет так называемая математическая индукция в теории целых чисел;

это была совершенно новая идея, которая перешла затем во все сочинения по теоретической арифметике. Эти мысли Грассмана, главным образом, в обработке Шредера (1877), получили очень широкую известность и сыграли исключительную роль в деле выяснения той идеи, что арифметика может быть построена независимо от тех реальных образов, с которыми мы ее обыкновенно связываем, что она может быть развита сама из себя, что она представляет собой построение нашего ума, при создании которого опыт... имеет лишь руководящее, а не обязательное значение; что возможны другие, совершенно аналогичные построения, находящие себе такое же применение и могущие служить полезным орудием исследования.

Отсюда уже только один шаг, чтобы перенести эти же идеи на геометрию; но нужно было, конечно, немало времени, пока эти идеи были усвоены, и Грассман до этого не дожил» [20, с. 66].

Закономерным результатом интереса к трудам Грассмана и к основаниям арифметики явилась замечательная работа Пеано *«Arithmetices principia nova methodo esposita»* («Принципы арифметики, изложенные по-новому», 1889). Это сочинение считают вехой в математике, логике и основаниях математики. Здесь дано первое изложение знаменитых постулатов натуральных чисел, *аксиомы Пеано*, — возможно, самое известное из творений ученого. Аналогичные идеи развил Дедекин в *«Was sind und was sollen die Zahlen?»*. Работа вышла из печати в 1888 г., когда «Принципы арифметики» Пеано уже находились в печати.

На II Международном Конгрессе математиков сразу же после доклада Гильберта «Математические проблемы» Пеано выступил с заявлением, что проблема № 2 «Непротиворечивость арифметических аксиом» уже решена его учениками. Это выступление было одним из редчайших заявлений Пеано о приоритете (и заявлением неудачным, так как до «решения» еще было далеко, еще много осталось на долю Геделя). Но Пеано попытался привлечь внимание к работам итальянских математиков, которые действительно внесли огромный вклад в развитие вопроса.

Теперь, когда мы знаем место «Основ геометрического исчисления по „Учению о протяжении“ Грассмана...» в творчестве

довали критические замечания, разбор недостатков, указания на приоритет итальянских математиков. В частности, очень хорошо были аргументированы возражения В. Ф. Кагана, представившего свою собственную систему аксиом.

Для Гильберта «не существовало» все, что изобреталось за пределами Геттингена, — даже о работах своих уехавших учеников он не упоминал (например, А. О. Гельфонда, А. Тарского), тем более он не ссылался на работы Фредгольма, Пеано... Кажется, его примеру следовали и близкие ему ученики — Э. Шмидт, Г. Вейль. Правда, Ф. Рисс ссылался на труды Фреше, Пеано (когда писал статьи в Париже или в Венгрии). А вот широко известная в настоящее время *аксиоматика Вейля* приведена без единого слова о работах Пинкерле и Пеано, из которых она взята. Допустим, это можно оправдать характером книги «Пространство. Время. Материя», которая представляет собой переработанные лекции. Но вот Вейль пишет о своем учителе: «Если я не ошибаюсь, Гильберт — первый из тех, кто свободно парил на этом высочайшем „метаматематическом“ уровне: систематически он изучал взаимную независимость аксиом и решал вопрос независимости некоторой ограниченной группы аксиом для некоторых наиболее фундаментальных теорем. Его метод — *конструирование моделей*: если обнаруживается противоречие с одной аксиомой и согласованность всех остальных аксиом, то первая аксиома не может быть следствием других». Кеннеди возражает: «Этот метод изобретен и уже систематически использовался Пеано, хотя, читая Гильберта, мы не узнаем этого. В „Grundlagen der Geometrie“ нет никакого упоминания о Пеано...» [66, с. 135].

Исследования Пеано по математической логике, основаниям геометрии и основаниям арифметики, естественно, органически связаны. В области арифметики Пеано признавал влияние Грассмана. Приведем оценку книги Грассмана, данную Каганом: «Арифметика Грассмана сыграла очень важную роль. Это было первое сочинение, в котором теория рациональных чисел была построена строго научно и формально. Особенную цену имеет то, что Грассман выяснил важное значение, которое имеет так называемая математическая индукция в теории целых чисел;

это была совершенно новая идея, которая перешла затем во все сочинения по теоретической арифметике. Эти мысли Грассмана, главным образом, в обработке Шредера (1877), получили очень широкую известность и сыграли исключительную роль в деле выяснения той идеи, что арифметика может быть построена независимо от тех реальных образов, с которыми мы ее обыкновенно связываем, что она может быть развита сама из себя, что она представляет собой построение нашего ума, при создании которого опыт... имеет лишь руководящее, а не обязательное значение; что возможны другие, совершенно аналогичные построения, находящие себе такое же применение и могущие служить полезным орудием исследования.

Отсюда уже только один шаг, чтобы перенести эти же идеи на геометрию; но нужно было, конечно, немало времени, пока эти идеи были усвоены, и Грассман до этого не дожил» [20, с. 66].

Закономерным результатом интереса к трудам Грассмана и к основаниям арифметики явилась замечательная работа Пеано «*Arithmetices principia nova methodo esposita*» («Принципы арифметики, изложенные по-новому», 1889). Это сочинение считают вехой в математике, логике и основаниях математики. Здесь дано первое изложение знаменитых постулатов натуральных чисел, *аксиомы Пеано*, — возможно, самое известное из творений ученого. Аналогичные идеи развил Дедекинд в «*Was sind und was sollen die Zahlen?*». Работа вышла из печати в 1888 г., когда «Принципы арифметики» Пеано уже находились в печати.

На II Международном Конгрессе математиков сразу же после доклада Гильберта «Математические проблемы» Пеано выступил с заявлением, что проблема № 2 «Непротиворечивость арифметических аксиом» уже решена его учениками. Это выступление было одним из редчайших заявлений Пеано о приоритете (и заявлением неудачным, так как до «решения» еще было далеко, еще много осталось на долю Геделя). Но Пеано попытался привлечь внимание к работам итальянских математиков, которые действительно внесли огромный вклад в развитие вопроса.

Теперь, когда мы знаем место «Основ геометрического исчисления по „Учению о протяжении“ Грассмана...» в творчестве

Пеано, рассмотрим подробнее один раздел этой небольшой работы — собственно «геометрическое исчисление». Эта часть была переведена в 1891 г. на немецкий язык А. Шеппом, и после этого исследование становится доступно более широкому кругу читателей. Общеизвестно, что именно через эту брошюру взгляды Грассмана оказали влияние на формирование современного векторного исчисления (считается, что это абсолютно доказанный факт).

Маленькая книжечка «Основы геометрического исчисления» (38 страниц) содержит введение и 15 параграфов. В нескольких строках «Введения» Пеано называет имена создателей «геометрических исчислений» — Мёбиус (1827), Беллавитис (1832), Грассман (1844) и Гамильтон (1853). Затем следуют параграфы с определениями основных понятий — ориентированного тетраэдра, суммы точек с весами — с точной ссылкой: «Понятия и обозначения этих параграфов принадлежат Мёбиусу (Werke. Bd. I, s. 41)» [71, т. 3, с. 70]. Запомним это. Далее идут параграфы:

IV. Векторы.

V. Координаты.

VI. Компланарные векторы и операция i .

VII. Произведение двух векторов.

VIII. Декартовы координаты.

IX. Линии.

X. Производные.

XI. Касательная к кривой.

XII. Теорема Тейлора.

XIII. Соприкасающаяся плоскость. Кривизна.

XIV. Касательная плоскость.

XV. Дифференциальный параметр.

Одно оглавление уже дает представление о «геометрическом исчислении» Пеано, и первое, что бросается в глаза, — Пеано следует той схеме, которая принята в теории кватернионов (а ссылка на Мёбиуса!). Но все-таки выделим «в явном виде» то, что взято

из теории кватернионов, и то, что свойственно «Учению о протяжении» Грассмана.

Бесспорно, из теории кватернионов заимствованы понятия (и названия) *вектора*, *компланарности*, представление вектора U в виде

$$xI + yJ + zK$$

с обозначениями единичных векторов через I, J, K (обозначение i оставлено за оператором поворота вектора на прямой угол! Этот оператор — единственный «пережиток» ТФКП в этом исчислении, кроме, пожалуй, слов *аргумент* и *модуль*). Из теории кватернионов и условия параллельности (не коллинеарности) и компланарности (с опечаткой: «двух векторов»). Поэтому и вся аналитическая геометрия «Геометрического исчисления» кажется переводом на язык координат кватернионных пособий.

Наконец, в заключительном параграфе Пеано так вводит оператор ∇ (и распространяет понятие на случай n переменных): если $u = f(u_1, u_2, \dots, u_n)$, то

$$\nabla u = \frac{\partial f}{\partial u_1} \Delta u_1 + \frac{\partial f}{\partial u_2} \Delta u_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_n} \Delta u_n.$$

Эту величину Пеано называет *дифференциальным параметром*. Почему Пеано привлек гамильтоново обозначение ∇ для этого понятия, отличного от градиента u , остается загадкой. Его примечание к данному пункту ничего не проясняет: «Дифференциальный параметр, рассматриваемый только по величине, был введен Ламе, Гамильтон рассматривал его как вектор и обозначил его через ∇ , как это и принято сейчас» [71, III, с. 71]. Здесь, действительно все странно: введенное понятие отличается от дифференциального параметра Ламе, но это и не вектор Гамильтона; и что же тогда связывает пеаново ∇ с «принятым сейчас» ∇ ?

Обратимся теперь к «Учению» Грассмана.

Если не считать понятий ориентированного тетраэдра и суммы точек (что Пеано приписывает Мёбиусу), то «по Грассману» Пеано вводит только скалярное произведение векторов. Оно названо «внутренним» (как у Грассмана) или «геометрическим»

(как у Резаля) и определено как

$$u \times v = \text{gr } u \times \text{gr } v \cos(u, v).$$

Обозначение *gr* есть сокращение слова *grandeze* — «величина», а знак умножения ($\times$), как объясняет Пеано в примечании, использовали Грассман и Резаль.

Методы Грассмана можно увидеть только в двух теоремах. Одна из них следующая. Пусть

$$B - A = B' - A'.$$

Тогда

$$B + A' = B' + A, \quad \text{или} \quad \frac{B + A'}{2} = \frac{B' + A}{2},$$

т. е. середина BA' совпадает с серединой $B'A$. Тем самым доказана теорема: диагонали параллелограмма, пересекаясь, делятся пополам.

Вторая — произвольный вектор можно представить в виде суммы двух взаимно перпендикулярных векторов: «Пусть $OP = P - O$ — произвольный вектор. Проведем окружность с диаметром PO . Если M — произвольная точка окружности, то:

1. $OP = P - O = (P - M) + (M - O)$ и
2. $PM \perp MO$ » [72, с. 8].

Это все, что при самом пристрастном подходе можно приписать влиянию «Учения» Грассмана. Поэтому напрашивается вывод, что сочинение Пеано завершает эволюцию векторного исчисления от теории кватернионов, а не от «Учения о протяжении». Именно Пеано сделал последний шаг, изложив на языке декартовых координат соответствующие формулы и теоремы векторного анализа (Хевисайда или Гиббса). Правда этот вывод находится в вопиющем противоречии с названием работы Пеано — «Основы геометрического исчисления по „Учению о протяжении“ Г. Грассмана...».

До сих пор, вероятно, никто не подвергал сомнению «законность» заголовка, данного автором. И уж, конечно, при жизни Пеано для ближайших его учеников эта истина была очевидной:

«Профессор Пеано был первым, кто дал геометрическую интерпретацию и конкретных форм, и операций *Учения о протяжении*» — это писал Чезаре Бурали-Форти. Он был ассистентом Пеано в 1894–1896 гг., и ему принадлежит книга «*Introduction à la Géométrie différentielle suivant la méthode de H. Grassmann*» (1897).

С полным доверием эту точку зрения принял Кассина — ученик Пеано, издавший его труды. Х. Кеннеди разделяет веру Кассины: «...эта книга была результатом переработки грассманова *Ausdehnungslehre*. Пеано не претендует на оригинальность идей, содержащихся в ней, но не может быть никакого сомнения в том, что предельная ясность его изложения (по контрасту с пресловутой трудностью чтения труда Грассмана) помогла распространить грассмановы идеи и сделать их более популярными. Более того, современник Грассмана и Пеано — Юниус Массо, который читал самого „Грассмана“, а после знакомства с сочинением Пеано создал курс механики в векторном изложении, с восхищением писал: „Насколько темно и непонятно у Грассмана, настолько все четко и ясно у Пеано“».

Даже в наши дни Дьедонне считал, что: «единственный, кто воспринял труд Грассмана, это Пеано... он смог дать общее определение векторных пространств, которое отличается от нашего только во второстепенных пунктах, и добавил (чего Грассман не смог сделать) общее определение линейного преобразования; он заметил, что его определение охватывает также и векторные пространства бесконечной размерности, дав в качестве примера пространство всех полиномов с действительными коэффициентами».

Итак, если сравнивать книгу Пеано (в названии которой стоит имя Грассмана) с «Учением о протяжении» Грассмана, то между ними обнаруживается ничтожно мало общего: те страницы, которые могли бы быть «переводом» труда Грассмана, принадлежат Мёбиусу, но тогда на долю «Учения о протяжении» остается только обозначение $\times$ для скалярного произведения и название «внутреннее произведение» для него (название, возможно, даже неудачное, поскольку «внешнее произведение» отсутствует).

Возникают закономерные вопросы: почему Пеано считал, что он излагает «геометрическое исчисление по Грассману»? что же на самом деле он излагал? каким работам он обязан знакомством с векторными методами? что мог знать Пеано о «геометрических исчислениях» к 1888 г. или немного ранее?

Из четырех математиков, названных им в предисловии, Пеано, безусловно, читал Мёбиуса и, вероятно, Беллавитиса. Можно категорически утверждать, что он не видел книг Гамильтона: сначала он писал, что Гамильтон изобрел векторы в 1853 г., позднее ссылался на «двухтомный труд Гамильтона 1845 г.». Здесь перепутано все: открытие Гамильтоном кватернионов (в 1843 г.) и первые публикации (1844 г. и след.), первая книга — «Лекции о кватернионах» (1853), и посмертные «Элементы кватернионов» в двух томах (1866).

Можно привести и примеры прямых ошибок. Даже и в 1894 г. Пеано отождествлял внешнее и внутреннее произведения Грассмана и векторную и скалярную части кватернионного произведения векторов (с точностью до знака). Поэтому он полагал, что одну из этих теорий можно вывести из другой.

В 1908 г. Пеано, рассматривая единичный вектор U_i , писал, что «...в теории Гамильтона единичный вектор соответствует $\text{sgn } i$ арифметики». На самом деле верзор вектора является одним из самых фундаментальных операторов в теории кватернионов, он «вращает» вектор, а не оставляет его неизменным; роль U_i отнюдь не аналогична ± 1 арифметики.

Наконец, остается последний из четырех математиков — Грассман. По мере чтения работ Пеано все меньше доверия вызывает версия о том, что книга Пеано есть переложение в понятной форме «Учения о протяжении». Вот некоторые соображения.

1. Естественный ход событий, казалось бы, должен быть таким: Пеано читает работы Грассмана и, находясь под впечатлением его идей, начинает размышлять, развивать свой вариант учения, возможно, отходит совсем далеко от источника первых идей... На самом деле все происходит как раз наоборот: в каждой новой статье Пеано появляются всё новые детали из теории Грассмана (определения, понятия, свойства «Учению о про-

тяжении») и, наконец, в 1896 г. — жалоба на трудности чтения Грассмана.

2. В 1894 г. вышел в свет первый том собрания сочинений Г. Грассмана. Пеано написал рецензию на это издание. Естественно ожидать, что из рецензии-то мы узнаем о его взглядах на работы Грассмана и о его личном отношении... Увы, рецензия обнаруживает только очень поверхностное знакомство автора с творчеством Грассмана — Пеано просто перевел начальные абзацы из предисловия Энгеля к первому тому трудов.

3. В комментариях к «Геометрическому исчислению» Пеано объясняет происхождение терминов *внутреннее произведение* (Грассмана) и *геометрическое произведение* (Резаля). Во втором случае он дает скрупулезно точную ссылку («*Traité de cinématique*», 1862, р. 64), хотя это десятистепенной важности вещь, попутное замечание — термин не употребляется. А «Учение о протяжении» — основа и первоисточник — здесь (как и всюду далее в работах Пеано!) не цитируется ни разу (как впрочем, и любой другой труд Грассмана!!). Остается даже неизвестным, знал ли Пеано, что Грассман разработал четыре варианта своей теории, и какую же из этих теорий подразумевал Пеано под «геометрическим исчислением».

Прямая ссылка, вернее, упоминание конкретной работы Грассмана встречается у Пеано лишь в 1896 г. Он пишет: «Причины, по которым работа Грассмана оставалась непонятой долгое время, по-моему, заключаются в туманной и метафизической форме, далекой от обычного языка математики, форме, которая с самого начала отталкивает и охлаждает читателя вместо того, чтобы привлекать его. В самом деле, изучая эту работу, я открыл силу нового метода, только испытав его приложения, особенно те, которые опубликованы в его „*Kurze Übersicht über das Wesen der Ausdehnungslehre*“ (1845).

Начав с этих приложений, я изыскал возможность *реконструировать* исчисление и дать определение вводимым понятиям, используя только элементарную геометрию» [73, с. 171]. Курсив (наш, конечно) имеет целью привлечь внимание к слову.

Из этой цитаты видно, что, во-первых, единственной работой, на основании которой создано «Геометрическое исчисление», является «Краткий обзор учения о протяжении», а во-вторых, Пеано полагал, что его собственное сочинение — это реконструкция, восстановление, а не изложение.

Напомним исторический казус: братья Бернулли пытались реконструировать неясно изложенное дифференциальное исчисление Лейбница и создали теорию, которая не тождественна исчислению Лейбница, а отлична от него в принципиальных моментах.

Но и этого мало! В этом «Кратком обзоре...» (написанном самим Грассманом) НЕТ ни понятия внутреннего произведения векторов, ни знака $\times$ для него. Значит, и не эту статью изучал Пеано! Нужно искать другие источники.

Единственным математиком, поддерживавшим Грассмана с самого начала его научных исследований, был Мёбиус. Помогая Грассману издать статью «*Geometrische Analyse*» (1847), Мёбиус решил изложить свои комментарии к ней в виде самостоятельной статьи — так возникла его работа «*Die Grassmannsche Lehre von Punctgrößen und den davon abhängigen Grossenformen*». Эта статья, написанная исключительно четко и ясно (что вообще характерно для работ Мёбиуса), содержала все, что мы читаем у Пеано (с той только разницей, что Мёбиус употребляет слово «линия» вместо «вектор»).

Так как при перемножении длин двух ортогональных отрезков получается площадь прямоугольника, то Мёбиус под термином *произведение двух линий* понимает площадь параллелограмма (он поясняет: «как обычно»). Так возникает необходимость ввести новое название для

$$AB \times CD = |AB| \cdot |CD| \cdot \cos \varphi$$

— термин *внутреннее произведение* оправдан (кроме того, есть замечание о внешнем произведении в «Учении о протяжении» Грассмана).

Поскольку Пеано знал труды Мёбиуса, то почти не остается сомнений, что с идеями Грассмана он познакомился именно по пересказу Мёбиуса.

4. Обозначения и некоторые термины «Геометрического исчисления» Пеано (I, J, K для единичных векторов; i — как оператор поворота на прямой угол, ∇ , термины *вектор*, *компланарность*) свидетельствуют, что он был знаком с работами математиков англо-американской школы. Между тем, многие замечания, рассеянные в других статьях, убедительно доказывают, что работ Гамильтона он не читал — он много раз писал о «простоте и ясности изложения Гамильтона», о том, что «Гамильтон обладал не только выдающимися знаниями, но и даром преподавателя, умением ясно излагать свои теории — поэтому многочисленные авторы последовали его путем. Достаточно упомянуть Максвелла...» [71, т. 3, с. 344]. Но только один факт: в «Лекциях о кватернионах» одна (шестая) лекция занимает почти столько же страниц, сколько остальные 5 лекций, — уже показатель, сколь неудачно построение книги Гамильтона.

В словах Пеано верно только утверждение о Максвелле. Современный исследователь творчества Гамильтона пишет о «нечитабельности» его работ [60, с. 322].

С 1885 г. Пеано начал читать в Туринском университете курс «Геометрическое исчисление». Из этого курса вырос учебник «*Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale*» (1887). Глава «Геометрические величины», в которой рассматриваются точечные множества (линейные и плоские) и вводятся понятия внутренней, внешней, граничной точек и меры множества, действительно обнаруживает влияние статьи Грассмана «Краткий обзор учения о протяжении».

Черты теории кватернионов имеются лишь в «Геометрическом исчислении», в дальнейших работах они теряются, стираются — никогда больше не упоминаются операторы ∇ и i , никогда Пеано не возвращается к изложению аналитической геометрии — т. е. именно с элементами теории кватернионов происходит ожидаемый естественный отход от источника первого знакомства с идеей. Итак этот источник не найти, перебирая имена, названные Пеано. Поставим вопрос так: существовал ли в математической литературе труд, явно близкий к теории кватернионов и такой, что его можно было принять за нечто, род-

ственное «Учению о протяжении» Грассмана? Ответ однозначен — «Элементы векторного анализа» Гиббса. В предисловии Гиббс писал:

«Основные принципы изложенного ниже анализа — те же, что и у известных студентам кватернионов, и только слегка отличаются от них... как прецедент такого отступления от использования кватернионов можно назвать „Кинематику“ Клиффорда. Можно упомянуть в связи с этим также имя Грассмана, к системе которого следующий метод ближе в некоторых отношениях, чем к системе Гамильтона» [54, с. 17]. Можно ли поверить этим словам и принять «Элементы векторного анализа» за изложение «Учения» Грассмана? Это предположение кажется весьма правдоподобным. В качестве подтверждения, что такое заблуждение возможно, напомним мнение Массо: человек, пытавшийся читать книги Грассмана и знакомый с ними настолько, что мог оценить трудности чтения, не заметил, что «Геометрическое исчисление» Пеано — это не «Учение» Грассмана, а нечто совсем иное... Так же мог ошибиться и Пеано, знакомый с трудами Грассмана весьма и весьма поверхностно и не знакомый с книгами Гамильтона вовсе.

Возможно, некоторым косвенным доказательством может быть такой факт: привлекая своих учеников к работе над сборниками «Формулы математики», Пеано составил для них свод правил, среди которых было и такое: «Хорошо бы помещать исторические замечания, совершенно не проверяя их, так как для этого требуется масса работы — ее можно оставить другим сотрудникам...» Вот именно это «совершенно не проверяя» могло как раз и сыграть роль в данной истории (а на долю наших современников и выпала роль «других сотрудников»).

Правила Пеано были столь хорошо продуманы, что система нумерации параграфов, формул..., рекомендованная Пеано [(1.1), (1.2), (1.1.2) и т. д.], стала общепринятой и ею пользуется и по сей день весь научный мир.

Остается выяснить:

1. Мог ли Пеано читать это «самиздатовское» сочинение Гиббса?
2. Если «да», то оправдано ли психологически последовавшее умолчание?

Что касается первого вопроса, то известно, что Гиббс послал экземпляры своих брошюр в Турин, в числе адресатов был учитель Пеано — Бассо. Другой путь, каким Пеано мог бы получить «Элементы векторного анализа», — более сложный, но вполне реальный — через немецкого математика Якоба Люрота, который был одним из тех, кто подготовил к изданию труды Г. Грассмана, и уже поэтому входил в число «заинтересованных» лиц (а их всех, во всем мире, Гиббс «охватил»), и с этим математиком Пеано был дружен.

Попытаемся решить второй вопрос: если Пеано ошибся, а со временем увидел это, что можно было бы ожидать от него — «саморазоблачения» или «молчания»? Кажется, ему было свойственно дипломатической умолчание. Тогда все факты «замалчивания имени Гиббса» имеют смысл свидетельства и подтверждают высказанное предположение. Пеано часто сопровождал свои статьи историческими справками, в частности он писал об идеях Лейбница, замечал, что Мёбиус, Грассман рассматривали операции непосредственно с геометрическими объектами... Но никогда Пеано не сообщал, откуда он почерпнул векторные методы и термины своего «Геометрического исчисления...».

Имени Гиббса он вообще не упоминал, даже когда, казалось, писал о нем, например: «...сегодня многие пытаются упростить теорию кватернионов (Макфарлан), тогда как другие возвращаются к идеям Грассмана или пытаются скомбинировать различные методы геометрических исчислений. В самом деле, эти различные методы геометрических исчислений не исключают друг друга. Они — различные части одной и той же науки, или, скорее, различные пути представления одного и того же предмета различными авторами, из которых каждый изучает его независимо от других» [71, с. 170].

Тогда именно Гиббсу должны быть отнесены все слова признания, которые Пеано говорил о теории Гамильтона: «Работа Гамильтона была хорошо встречена его современниками. Этой счастливой судьбой она отчасти обязана ясности изложения и удачно введенной номенклатуре. Кватернионы были использованы во многих работах и трактатах как чистой, так и прикладной математики...»

В дискуссии 1909–1913 гг. ученики Пеано — Марколонго и Бурали-Форти — обмолвились, что школа итальянского векторного исчисления «многим обязана Гиббсу». К сожалению, никаких уточнений не последовало.

Из этих фактов можно сделать вывод, что Пеано принял за «Учение о протяжении...» брошюры «Элементы векторного анализа» Гиббса плюс некоторые понятия из алгебры точек Мёбиуса—Грассмана (которые лишь упомянуты на первых страницах работы Пеано).

В мировой литературе удалось найти единственное прямое подтверждение этой гипотезы. В статье Карвалло «Метод Грассмана» (1892) автор «предупреждает», что «...не советовал бы знакомиться с „Учением о протяжении“ Грассмана по „Геометрическому исчислению“ Пеано». Карвалло указал, кроме того, что исчисление Пеано родственно барицентрическому исчислению Мёбиуса.

По-видимому, труды Грассмана, главным образом, его «Арифметика», явились для Пеано поводом к размышлениям, которые затем вылились в сочинения по основаниям арифметики и геометрии, по аксиоматике.

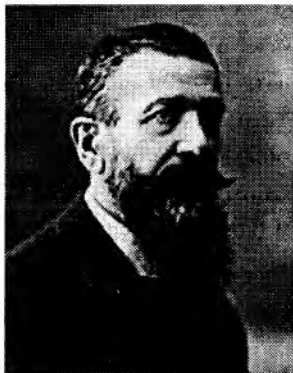
Глава 11

«В векторных обозначениях царит хаос»

Ч. Бурали-Форти, Р. Марколонго

Полемику «Векторы против Кватернионов» Хевисайд характеризовал как штурм кватернионной крепости: «Кватернионные спокойствие и мир нарушены. Суматоха в кватернионной цитадели, боевая тревога и отклонение от обычного пути, метание камней и поливание кипятком вторгшейся толпы. Что еще означает его письмо?...» (письмо Тэта в «Nature»). Однако этот «приступ» окончился тем, что «осада» была снята. Ни одна из сторон не обратила другую в иную веру.

Еще за три года до дискуссии Гиббс написал в письме: «Я думаю, что вот-вот начнется борьба за существование между различными методами и обозначениями в кратной алгебре, особенно между идеями Грассмана и Гамильтона» [78, с. 115]. Борьба разразилась лишь в 1909–1914 гг. Эту новую дискуссию можно рассматривать как продолжение



Ч. Бурали-Форти

предыдущей. Она вспыхнула потому, что в первой не были решены ни большие, ни малые проблемы: Гиббс тщетно пытался привлечь внимание к исчислению Грассмана и проанализировать ситуацию с точки зрения развития алгебры; и даже обозначения различных векторных систем не были согласованы или твердо установлены.

Результатом полемики было широчайшее обнародование векторного анализа. Опыты Герца и статьи Хевисайда (демонстрировавшие эффективность векторных методов) вызвали волну интереса к максвелловской теории и лавину публикаций. В 1894 г. вышла первая книга на континенте по теории Максвелла — «Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität», книга Августа Фёппля. В 1901 г. в Америке издан «Векторный анализ» Гиббса—Уилсона, а в 1903 г. — первая книга по математическому анализу на континенте Бухерера «Elemente der Vektor-Analyse mit Beispielen aus der theoretischen Physik». Далее последовали многочисленные статьи-обзоры в авторитетной «Математической энциклопедии», издаваемой в Германии. В статье 1903 г. Лоренц «вспомнил», что векторы на плоскости представляют собой комплексные числа и для обозначения их длины можно использовать «обычный знак $|\cdot|$ », — так введено обозначение длины вектора $|\mathbf{r}|$. В это же время были опубликованы и давние брошюры Гиббса («Scientific Papers», 1906).

Кроу полагает, что публикации Гиббса оказали существенное влияние на распространение векторного анализа, потому что, во-первых, они появились в момент, когда векторное исчисление было злобой дня и физики уже осознали необходимость освоения векторных методов, и во-вторых, из всех авторов, писавших о векторном исчислении, Гиббс был самым знаменитым и самым авторитетным (об успехе книги Гиббса—Уилсона свидетельствует быстро последовавшее второе издание — 1909 г.).

Признанием важности проблемы был и тот факт, что IV Международный Конгресс математиков в Риме (1908) постановил создать комиссию для изучения вопроса унификации векторных обозначений.

В 1903 г. в Германии уже создавалась аналогичная комиссия. По мнению Клейна, единственным результатом ее работы было введение трех новых обозначений. Он писал, что особая трудность при этом заключалась в различии терминологии и образа выражений у отдельных авторов.

И новая комиссия по унификации векторных обозначений не имела, как и следовало ожидать, ни малейшего успеха [25, с. 82]. Но это Клейн писал уже после краха всех попыток, а вот как развернулось обсуждение.

В ходе подготовки к IV Международному Конгрессу Бурали-Форти и Марколонго опубликовали исследование происхождения различных обозначений. Кроме того, они представили доклад Конгрессу. Доклад и публикации стали основой для широких обсуждений, развернувшихся после Конгресса на страницах журнала «L'Enseignement mathématique» (1909–1913).

Комиссия была сформирована к октябрю 1909 г. В нее вошли М. Абрагам, Р. Болл, Ж. Адамар, П. Ланжевен, Дж. Лория, Р. Марколонго, Л. Прандтль, В. А. Стеклов, А. Уайтхед, Э. Уилсон. Стеклов попросил заменить его П. О. Сомовым.

На заключительном заседании V Международного Конгресса математиков (Лондон, 1912 г.) комиссия вынуждена была объявить, что не успела закончить свою работу, и просить о продлении ее мандата до следующего Конгресса (он должен был состояться в 1916 г. в Стокгольме, но война нарушила все планы).

Интерес итальянских математиков к векторному исчислению родился, конечно, под влиянием Пеано. Это отчасти объясняет пристрастие Марколонго и Бурали-Форти к теории Грассмана, явно проявляющееся в их публикации и последовавшем обсуждении. Довод — так писал Грассман — являлся для них столь «окончательным», что авторы, кажется, с удивлением обнаруживали, что есть люди, на которых этот аргумент не действует: «Если г. Уилсон еще не убежден, мы не знаем, что делать».

Вообще говоря, это условие сформулировано как принцип в вводных фразах публикации: «Обозначения не должны находиться в противоречии с обозначениями собственно геометрических систем механики Грассмана, с геометрическими формами

Гамильтона (кватернионы) и Мёбиуса (барицентрическое исчисление)» [49, с. 41]. Но последовательно выдерживалось только одно положение — чтобы не было отступлений от обозначений Грассмана. Влияние Пеано выразилось не только в явном тяготении к учению Грассмана, но и в формально-логическом стиле языка и обозначений в духе «Математических формул» (Бурали-Форти был одним из соавторов Пеано при создании этого труда).

Итак, предложения Чезаре Бурали-Форти и Роберто Марколонго об установлении новой символики — «простой и абсолютной» (как многократно повторено ими) — были сведены в таблицу, которой предпослано несколько строк введения: «В момент, когда векторное исчисление все больше и больше проникает в прикладные науки, необходимость иметь единообразные обозначения становится все более настоятельной...»

Таблица, озаглавленная «Рациональные обозначения для минимальной векторной системы, предложенные профессорами Ч. Бурали-Форти и Р. Марколонго», содержала сводку следующих «анкетных данных»:

1. Название понятия.
2. Обозначение, предлагаемое для употребления.
3. Фамилия автора, впервые использовавшего это обозначение.
4. Обозначения, осужденные на исключение.
5. Главные причины отклонения этих последних обозначений.

Позиция авторов ясна из нескольких примеров.

Вектор, направленный из точки A в точку B , предложено обозначать через $B - A$, как это делали Грассман, Гамильтон, Мёбиус, Беллавитис. Обозначение AB должно быть отброшено, так как, во-первых, его надо сохранить для альтернативного произведения теории Грассмана и, во-вторых, исчисление, возникающее при таком обозначении вектора, не имеет аналогий с алгеброй (ибо в алгебре AB означало бы произведение величин A и B).

Авторы допускали обозначение векторов жирной печатью $\mathbf{a}$ (хотя это и не более «алгебраично», чем AB).

Длину вектора, по мнению Бурали-Форти и Марколонго, нужно называть «величина или модуль a » и обозначать $\text{mod } a$.

Первыми, кто воспользовался такими обозначениями, были Ар-ган и Коши. Обозначение $|a|$ нужно исключить по следующим причинам: «...mod — символ функции, который подчиняется общим алгебраическим законам, поэтому его надо писать перед переменной. В обозначении же $|a|$ символ функции есть знак $|$, который стоит по обе стороны от переменной. В исчислении Грассмана этот символ вызовет путаницу с обозначением $|$ — символом функции, который стоит перед вектором...» [49, с. 42].

Бурали-Форти и Марколонго отклонили все обозначения векторного произведения —

$$V.ab, V(ab), [a \cdot b], a \times b, /(a, b)$$

— и предложили свое собственное: $a \wedge b$, где $\wedge$ — перевернутая буква V от слова *Vectoriel*. Так же отвергнуты обозначения

$$S.ab, (a \cdot b), (a, b), a \cdot b$$

для скалярного произведения; предпочтение отдано обозначению $a \times b$, которое использовали Грассман, Резаль, О. И. Сомов. Обоснование: символ операции должен стоять между переменными. По этой причине отбрасываются

$$V.ab, S.ab, [ab]$$

и их модификации.

Бурали-Форти и Марколонго поясняли свой выбор: «Мы приняли принцип Гиббса: указывать знаком операции (а не функции) внутреннее и внешнее произведения.

Но мы не можем принять соответствующие знаки... главным образом, по историческим причинам — потому что точка есть знак разделения, и если придать ей другие значения, то это может породить путаницу. Мы принимаем знаки $\times$, $\wedge$; но форма знака не важна, лишь бы только символ был практичен и всегда означал одну и ту же операцию. Можно выбрать для забавы даже что-нибудь из астрономических знаков!» Таково объяснение причин, по которым забракованы обозначения Гиббса.

Вероятно, авторам все эти аргументы казались вескими, но для остальных ученых категорические заявления «символ

не практичен» или «обозначение нужно зарезервировать для грассмана...» не были достаточно убедительными.

По другим соображениям отклонены обозначения операций через скобки $()$, $[]$: «В обозначениях $()$, $[]$ форма скобок должна характеризовать две функции, тогда как в алгебре форма скобок случайна. Обозначения $()$, $[]$ противоречат общим алгебраическим законам». Против обозначения векторного произведения крестиком выдвигается самый «сильный» аргумент: «Грассман этот символ использовал в очень разных значениях с соблюдением всех формальных алгебраических свойств. В векторном произведении он не имеет свойства коммутативности».

Далее предлагается ввести три функции — градиент u , дивергенцию u , ротор u — с обозначениями $\text{grad } u$, $\text{div } u$, $\text{rot } u$ и исключить из употребления ∇ . Этот символ, «приспособленный к кватернионам, не приложим в минимальной векторной системе». Авторы еще раз поясняют, что основной принцип в математической логике: $x = y$, означает, что «все свойства x суть также свойства y », а символ ∇ означает в одном случае одни операции, а в другом — совсем другие. «Допустимо ли в математике одно и то же название, один и тот же знак для обозначения различных вещей?... мы не должны следовать этим путем, который приводит к неминуемой путанице». Это соображение относится и к обозначениям Ламе Δ_1 и Δ_2 : « $\Delta_2 u = \text{div grad } u$, $\Delta_2 u = \text{grad div } u - \text{rot rot } u$, и поэтому Δ_2 имеет разные свойства в зависимости от того, применен ли он к скаляру или вектору...»

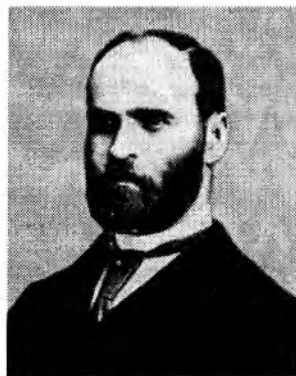
Предложения Бурали-Форти и Марколонго вызвали оживленную дискуссию. Ученые, принявшие участие в обсуждении вопроса, расходились в частностях, но были единодушно против mod и за сохранение знака $||$ и символа ∇ . Безоговорочного одобрения предложения не нашли ни в одной из школ. Самыми резкими были отзывы кватернионистов, которых возглавлял Нотт.

Прежде всего он обратил внимание на то, что нелегко понять, что именно подразумевают итальянские математики под «минимальной системой векторного анализа»: систему, основанную на возможно меньшем числе постулатов, аксиом или опре-

делений? или «минимальное число» символов операций и символов функций? Чтобы ответить на эти вопросы, Нотт сравнивает две книги Бурали-Форти и Марколонго с работами Гамильтона и Гиббса. Он пишет, например, что в теории кватернионов символ ∇ позволяет единообразно определить grad, div, rot, так что «минимальность» символов не достигается в «минимальной системе». Участники этой дискуссии, как и в первой, постоянно переходили от обозначений к понятиям и наоборот.

Нотт писал о кватернионах с восторгом: «Одно из наибольших достоинств системы обозначений Гамильтона — ее систематическое построение по единому простому плану. Сам знак ∇ есть просто перевернутая буква Δ ... греческие буквы употреблены, чтобы отличить векторные величины от скалярных. Даже Φ есть греческая буква F — символ, более подходящий для представления векторной функции, чем α , которой ее заменили итальянские анналисты». Итогом его критики были слова: «В системе векторного анализа, представленной Бурали-Форти и Марколонго, я не вижу единого метода. Их обозначения имеют различные истоки и во всех случаях им не хватает выразительности. Система... не логична в основе и не имеет никаких прав называться рациональной».

Наиболее примирительную позицию (как и в предыдущей дискуссии) занял Макфарлан: «...предложения Бурали-Форти и Марколонго не кажутся вносящими много в решение проблемы унификации обозначений; более того, эти предложения содержат дефекты в некоторых пунктах и вводят новый символ Λ . Зачем увеличивать уже существующую анархию в обозначениях вместо того, чтобы уменьшать ее?... Нужно получить унификацию или примирение принципов кватернионов с векторным анализом, прежде чем фиксировать обозначения. Мне кажется, что первым шагом должна быть логическая унификация теории



А. Макфарлан

кватернионов и векторного анализа между собой и со скалярным анализом».

Реплика Пеано в этой дискуссии имела «общематематическое» значение: «Чтобы иметь ясные и строгие обозначения без двусмысленностей, необходимо, чтобы каждый символ выражал одну-единственную идею и каждая идея выражалась бы одним-единственным символом. Скобки введены в арифметике для того, чтобы группировать символы, следовательно, недопустимо, чтобы они имели другое значение... Нельзя использовать скобки для указания функции; нельзя обозначать через $()$ и $[]$ произведение векторов... В формуле $f(x)$ нельзя в скобках указывать аргумент; нужно вернуться к обозначению Лагранжа fx .

Корень представляет собой и знак радикала, и скобки; нужно его исключить, записывая $\sqrt{a+b}$ вместо $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, эта запись имеет также и известные типографские преимущества» [71, с. 217].

В ответах на критические замечания и предложения Бурали-Форти и Марколонго никогда не шли ни на малейшие уступки и одинаково агрессивно отвечали всем. «Для Нотта спасение только в кватернионах, для Уилсона — только в системе Гиббса. Мы показали, что кватернионы несостоятельны и что система Гиббса, вообще говоря, ложна; мы берем от обеих систем то хорошее, что в них есть, и строим систему, которая может либо существовать сама по себе, либо быть выведенной целиком из обширной системы Грассмана—Пеано».

Общие настойчивые протесты побудили Бурали-Форти и Марколонго ответить специальной статьей, посвященной разбору системы Гиббса (1912). Они, кажется, пытались «разделить» противников (с тем, чтобы потом «властвовать»?). Это было сделано неудачно, так как несмотря на «реверансы», ясно, что с теорией кватернионов они почти незнакомы: «Оригинальная система кватернионов Гамильтона (с символами I, I^{-1}), без сомнения, совершенна из-за своей общности и точности. Но она неполна, потому что может дать только стенографический способ...» Идемфактор Гиббса, мы видим, приписан Гамильтону... что же, в конце концов, «совершенна и обща» его система или

«неполна»? О «глубине» анализа можно судить хотя бы по следующему фрагменту:

«Мы дали подробную критику символу ∇ Гиббса. Этот символ со знаком «умножения $\cdot$ или $\times$ » слева или справа есть оператор; затем он становится *символическим вектором*: оканчивается, естественно, тем, что это символ недействующий и очень отличающийся от наблы Гамильтона, который есть символ совершенный и могущественный (*parfait et puissant*), но только для кватернионов». Полное впечатление, что авторы тирады не читали Гиббса, именно у него ∇ не является символическим вектором, а есть весьма действующий оператор. Почему этот оператор «недействующий и неэффективный» вне кватернионной теории? Какой смысл вложен в это утверждение? А дальше, после снисходительной похвалы («Теория диад Гиббса, рассматриваемая как одна из первых попыток, определенно имеет свою ценность») Гиббса «ставят на место» (снова демонстрируя отсутствие четкого представления об истинном положении): «Действительная ценность диад — почти нуль». Авторы заключают, что обозначения Гиббса противоречат гамильтоновым законам, ясным, простым и плодотворным (!!).

Вероятно, похвала обозначениям Гамильтона была приятна Нотту, но сами авторы отнюдь не собирались принимать эти обозначения. Свои собственные обозначения «очень простые и совершенно абсолютные», они все-таки противопоставляли всем остальным, как это следует из заявлений: « $a \wedge \nabla$ — символический оператор; в наших обозначениях ему соответствует

$$-\operatorname{div} b\bar{a} + \frac{db}{dP}a».$$

Или еще: «Если a — постоянный вектор, α — омография <линейная векторная функция> от P , то имеем по определению

$$\left(\operatorname{grad}_P \alpha\right) \times a = \operatorname{div}_P (K_\alpha a) \dots ».$$

Кажется странным, что последнее выражение авторы считают соответствующим законам алгебры и арифметики, а пред-

ставление линейной векторной функции

$$\Phi = (ic_1 + jc_2 + kc_3)$$

объявляют «столь сложным, что на практике его использование невозможно» и взамен предлагают (конечно, и простое, и абсолютное) выражение

$$\alpha = H(i, \alpha i) + H(j, \alpha j) + H(k, \alpha k).$$

Как много правды в шутке Литтлвуда: «...если нужно... ввести четыре аналогичные или родственные величины (такие, как, например, a, b, c, d), то они получали обозначения $a, M'_3, \varepsilon_2, \Pi''_{1,2}$ ».

Интересно, что ко времени этой дискуссии предыдущая была совершенно забыта! В 1893 г. Тэт писал о «так называемом векторном анализе», через 10 лет Нотт употреблял это название уже без иронии, доказывая, что «в двух великих трудах Гамильтона содержится полная система векторного анализа, развитая до высокого уровня». В 1911 г. Нотт писал уже так, как будто Гиббс и Хевисайд — признанные последователи Гамильтона: «Теперь, однако, ранние надежды Гамильтона и Тэта реализованы в расширяющемся использовании векторных методов и символизма, особенно в их физических приложениях...» Эта же эволюция взглядов Нотта видна и из следующих двух его высказываний. В первой дискуссии он утверждал: «У Гиббса нет ничего, чего не было бы у Гамильтона»; во второй: «В омографии Бурали-Форти и Марколонго нет ничего, превосходящего теорию Гиббса».

Бурали-Форти и Марколонго избрали не самую удачную манеру ведения дискуссии — не аргументация, а категорические заявления, не доказательства, а повторение слово в слово уже сказанного, как, например, ответ на «защиту» знака модуля: «Обозначение $||$ для модуля мешает использованию знака $|$, необходимого в грассмановой системе».

Иногда они срывались на элементарную грубость: «Уилсон говорит еще много вещей, без сомнения очень интересных, но мы не имеем счастья их понять... Уилсон только повторяет то, что он уже написал... несмотря на то, что мы уже ответили, мы покажем

ему еще раз, что вся критика г. Уилсона не имеет логического научного фундамента».

Такая некорректная дискуссия вызывала протест и желание устраниваться у тех, кто не хотел получать нелюбезные «ответы». Нотт и Уилсон высказались определенно и резко и отказались от дальнейших обсуждений. Последними словами Уилсона — ученика Гиббса — были буквально: «Поживем — увидим». Он, действительно, мог претендовать на некоторую объективность, так как учился у Пирса, «мэтра, воодушевленного методами Гамильтона», а перед публикацией «Элементов векторного анализа» изучал теорию Грассмана у Гиббса. Уилсон мог диспутировать со знанием дела с итальянскими приверженцами Грассмана (осваивающими, якобы *его*, теорию по переложениям Пеано).

При обсуждении обозначений современное $\overline{AB}$ не находилось в центре внимания. Это старейшее обозначение вектора, которое применял Арган. Вновь это обозначение изобрели американский ученый (из Арканзаса) Шаппер и немецкий проф. Хейн. Они предложили обозначать все векторные величины $\bar{a}, \bar{b}, \dots, \bar{A}, \bar{B} \dots$. А вот второе их предложение не «прижилось» в математике. Они хотели обозначить скалярное произведение через $\bar{a}\bar{b}$, а векторное, как вектор, через $\overline{ab}$, и утверждали: «Преимущества и простота этой системы обозначений говорят сами за себя».

Вероятно, решающим обстоятельством при выборе обозначений оказалось то, что физики приняли обозначения Гиббса. Может быть, это и есть ответ на слова Ф. Клейна: «Я не могу вполне понять, почему эта терминология для векторного анализа так укоренилась...»

Глава 12

«Общий анализ одухотворен векторным исчислением»

М. Фреше

Понятие пространства стало объектом изучения после того, как появились некоторые исследования по аксиоматике. Видимо, первой работой в этой области была статья Больцано «Betrachtungen über einige Gegenstände der Elementargeometrie». Больцано рассматривал основания элементарной геометрии и хотел дать строгое изложение геометрии треугольника и параллельных прямых. Здесь некоторый зародыш аксиоматической теории — точки, линии, плоскости — неопределяемые элементы, из которых Больцано развивает теорию. Эта попытка была предпринята, когда большинство математиков и не испытывали потребности в таких «абстрактных исследованиях».

Учение Грассмана, по-видимому, было следующим шагом на этом пути. «Все науки в высшем своем подразделении распадутся на реальные и формальные. Первые отражают в нашем мышлении бытие, являющееся нашему сознанию независимо от него; истинность этих наук покоится на соответствии между этим бытием и нашим мышлением. Вторые имеют своим предметом то, что предложено самой человеческой мыслью, и истин-

ность их заключается во взаимном согласии процессов нашего мышления», — так начинает Грассман свою книгу.

Эти идеи проникли сначала в теоретическую арифметику, математическую логику, основания математики через работы Штольца (1885), Шредера (1873), Пеано (1888). Среди ранних работ были статьи Лагерра и, в частности, «Об исчислении линейных систем» (отрывок письма к Эрмиту, 1867 г.). Оборот *линейные системы* использовался в XIX — начале XX вв. всеми математиками; впервые Пинкерле наряду с *линейными системами* и *линейными множествами* стал употреблять и термины *линейное пространство*, *функциональное пространство*, *бесконечномерное пространство*.

Работы по основаниям геометрии имеют началом «Лекции по новой геометрии» Морица Паша (1882). Этот труд был оценен позднее, когда развернулись исследования по основаниям геометрии; именно тогда Паш получил шутливое прозвище «отец Аксиоматики». Прологом работ математиков итальянской школы явилось сочинение Пеано — одна из трех частей его «Геометрического исчисления». Здесь в «Приложении» приведены аксиомы линейного векторного пространства (с точностью до терминологии). Можно только удивляться, как мало изменились аксиомы за сто лет:

«72. Существует система объектов, для которых даны следующие определения.

1. Определено равенство двух объектов системы, обозначаемое $a = b$, выражающее условие для двух объектов системы, которое выполняется для определенной пары объектов и ни для какой другой, так что справедливы следующие логические уравнения:

$$(a = b) = (b = a); \quad (a = b) \cap (b = c) \supset (a = c).$$

2. Определена сумма двух объектов a и b (то есть определен объект, обозначаемый $a + b$, также принадлежащий системе), которая удовлетворяет условиям:

$$(a = b) \subset (a + c = b + c); \quad a + b = b + a; \\ a + (b + c) = (a + b) + c.$$

3. Если a — некоторый объект системы и m — положительное целое число, то мы понимаем под ma сумму m объектов, равных a . Легко видеть, что для объектов $a, b, \dots$ и положительных целых чисел $m, n, \dots$ имеем

$$\begin{aligned}(a = b) &\subset (ma = mb); \\ m(a + b) &= ma + mb; \\ (m + n)a &= ma + na; \\ m(na) &= mna.\end{aligned}$$

4. Наконец, мы будем предполагать, что существует объект системы, называемый *нулевым объектом* и обозначаемый через 0 , такой, что для любого объекта a произведение числа 0 и объекта a всегда равно нулевому объекту, то есть $0 \cdot a = 0$.

Если по определению $a - b$ значит $a + (-1) \cdot b$, то из этого следует, что $a - a = 0$, $a + 0 = a$.

Определение. Система объектов, для которых даны определения 1–4 так, что выполняются предыдущие условия, называется *линейной системой*.

Объекты $a_1, a_2, \dots, a_n$ линейной системы называются *зависимыми*, если можно определить n чисел $m_1, m_2, \dots, m_n$, не равных нулю одновременно, так что

$$m_1 a_1 + m_2 a_2 + \dots + m_n a_n = 0.$$

В этом случае каждый объект, коэффициент которого не равен нулю, может быть представлен однородной линейной функцией остальных объектов.

Если объекты $a_1, \dots, a_n$ независимы (у Пеано так, а не „линейно независимы“) и если имеет место соотношение

$$m_1 a_1 + m_2 a_2 + \dots + m_n a_n = 0,$$

то

$$m_1 = 0, \quad m_2 = 0, \quad \dots, \quad m_n = 0 \quad [70, \text{с. 119}].$$

Понятие линейной независимости приводит к понятию размерности: «Максимальное число независимых элементов системы есть ее размерность» [70, с. 119].

А. Монна в книге «Функциональный анализ в исторической перспективе» (1973), процитировав этот отрывок, пишет: «В этой книге мы находим аксиоматическое определение линейного пространства, почти в современной формулировке. Но, возможно, самое замечательное, что эта книга имела незначительное влияние на развитие математики» [70, с. 114]. Конечно, это не так. Влияние непосредственное, очевидное, подтвержденное публикациями, было. Только приписано оно не Пеано, а другим авторам, повторявшим Пеано дословно, среди них Г. Вейль, Банах, Рисс. Идеи Пеано живут в «аксиоматике Вейля» (1918), в аксиоматике, приведенной Н. Винером (1920), в развитом вскоре понятии функционального пространства, в современной теории линейных векторных пространств. Источник оказался основательно забытым, поэтому разные авторы задают один и тот же вопрос в историко-математических исследованиях: известны ли были работы Пеано? Например, Монна пишет: «...в конце XIX века Пеано, Вольтерра, Пинкерле уже оперировали с понятием функционального пространства и даже линейного пространства в аксиоматическом изложении. Но хотя Рисс ссылается на статью Адамара, где есть ссылки на работы итальянцев, Рисс не ссылается на работы итальянских математиков. Знал ли Рисс их работы?» [70, с. 55]. А ведь гораздо естественнее вопрос: как мог бы Рисс не знать работ по теме, которая для него была главным делом жизни?

Сразу же после публикации аксиоматика Пеано нашла приложение в работах Пинкерле, заложившего фундамент функционального анализа.

Сальваторе Пинкерле считал себя учеником Вейерштрасса, лекции которого он слушал в 1877/78 уч. г. Эти лекции «Опыт введения в теорию аналитических функций по принципам проф. К. Вейерштрасса» (1880 г.) — первая систематизированная публикация идей Вейерштрасса. Сочинение имело большой резонанс (особенно в Италии) и привлекло внимание к молодому автору. С 80-х годов прошлого века Пинкерле занимался созданием «функционального исчисления», образцом для которого являлась теория аналитических функций Вейерштрасса.

Выполнению этой задачи Пинкерле посвятил всю оставшуюся жизнь, осуществляя следующую программу: «Начать с изучения самых простых операций, затем последовательными композициями и обращениями переходить постепенно к более сложным, подобно тому, как в теории аналитических функций последовательно переходят от рациональных функций к элементарным трансцендентностям, затем — к алгебраическим функциям и т. д.»

В итоге в серии статей он развил новую дисциплину, которую «задумывал» и характеризовал такими словами: «Работа, которую я имею честь представить Академии, принадлежит области анализа, которая так относится к обычной теории функций, как последняя — к исследованию о числах, то есть той области, где функция рассматривается как произвольно меняющийся элемент, и которую поэтому целесообразно назвать функциональным исчислением. При рассмотрении функции как переменного элемента появляется потребность в изучении операций, которые можно выполнять над нею, подобно тому, как теория функций порождает исследование арифметических операций, когда в качестве переменной рассматривается одно или несколько чисел, к которым применяются эти арифметические операции» (1895) [33, с. 83].

Труд Пинкерле «Дистрибутивные операции и их применение в анализе» (1901) может по праву считаться первой монографией по функциональному анализу. Почти все содержание книги было по частям изложено в опубликованных статьях Пинкерле, теперь речь шла о систематизации и некоторых обобщениях. Но вместе с тем результаты его ранних исследований, рассмотренные с единой точки зрения и собранные воедино, приобрели новое качество — самостоятельной научной дисциплины, интересной предметом изучения, методами и приложениями.

Книга начинается аксиоматическим определением линейного пространства; аксиомы Пинкерле почти идентичны аксиомам Пеано. Пинкерле вводит понятия линейной независимости или зависимости *векторов*, размерности, координат и т. д. При этом он ссылается на Лагерра и Пеано. Заслугой Пинкерле является

то, что он сделал *такое* построение теории. В статье 1896 г. «Замечание о геометрии функционального пространства» он излагает идеи и методы, которые будут новинкой в математике через 10 лет: «В некоторых недавно опубликованных работах я ввел понятие, которое в различных исследованиях по анализу удобно рассматривать как совокупность аналитических функций одной переменной x или, для большей определенности, как совокупность рядов по целым положительным степеням x — совокупность или пространство, в котором каждый ряд является элементом. Такое многообразие, очевидно, имеющее бесконечное число измерений, можно назвать функциональным пространством. Всякий степенной ряд по x будет точкой этого пространства, а коэффициенты ряда можно рассматривать как координаты точки».

Итак, важнейшее понятие определено совершенно четко, хотя этот факт основательно забыт, в наше время идея приписывается П. Леви: «...в 1922 г. он предложил рассматривать функцию как точку в бесконечномерном пространстве $x(t)$, заданную в интервале рядом коэффициентов ее разложения по ортогональным функциям или, если она аналитическая, — коэффициентами ее разложения в ряд Тейлора» [75, с. 29].

Когда Пинкерле говорил о бесконечномерных пространствах, он, как правило, ограничивался множеством степенных рядов с отличным от нуля радиусом сходимости. В 1901 г. он рассмотрел много других пространств: пространство ограниченных последовательностей, пространство рядов Лорана, целых рациональных функций и др. Кроме того, он использовал понятие, тождественное современной «норме», а именно $\max |\alpha_n|$, и даже требовал, чтобы операторы оставляли ограниченной эту величину.

Разумеется, геометрический язык Пинкерле не так богат, как современный, но именно он вошел в науку и затем был лишь уточнен и обогащен. Стоит еще сказать, что Пинкерле интересовался также и интегральными уравнениями.

Работы этого выдающегося ученого не были оценены по достоинству, возможно, потому что они написаны на итальянском языке и опубликованы в итальянских, то есть «малодоступных» журналах, но основной причиной было то, что при построении

теории Пинкерле взял за образец ТФКП, а в XX веке развитие функционального анализа происходило по другому направлению — теоретико-множественному. И все-таки приведем еще один разительный пример.

В книге Пинкерле изучает конкретные операторы — умножения, сдвига, дифференцирования, преобразования Лапласа и т. д. Работы Ф. Бернштейна и Г. Дёча по преобразованию Лапласа относятся к 20-м годам XX века, однако многие их результаты были получены Пинкерле на 30 лет раньше, об этом он писал с большим достоинством в 1925 г.: «Среди преобразований, ставящих в соответствие элементам заданного пространства элементы другого, также заданного пространства, по важности выделяется преобразование Лапласа—Абеля... Как я отмечал в ряде случаев, эта важность проистекает из того факта, что указанное преобразование обладает одним замечательным свойством, в некотором смысле характеристическим: умножение на переменную оно преобразует в дифференцирование и наоборот.

Я рассмотрел (и полагаю первым) это свойство с точки зрения функционального анализа, то есть как существенное свойство линейного преобразования между двумя функциональными областями и притом во многих работах, восходящих к 1887 г., и не без удовлетворения вижу, что в самых недавних работах становятся на ту же самую точку зрения, даже если мои исследования ускользнули от внимания их авторов» [33, с. 83].

Чрезвычайно важными для первого этапа развития функционального анализа были работы другого итальянского математика Вито Вольтерры. В 1887 г. он ввел функционалы как «функцию, зависящую от другой функции», или «функцию, зависящую от линии»; обозначение Вольтерры $F[\varphi_a^b(x)]$, а затем $F[\varphi_a^b(x)]$ стало скоро общепринятым.

Название *функционал*, как известно, ввел Адамар в 1903 г. Менее известно, что Адамар использовал слово *fonctionnelle* как прилагательное, а Фреше — нечаянно или намеренно — употребил слово уже в современном смысле, приписав термин Адамару.

Вольтерра определил непрерывность функционала, установил иерархию сходимостей, он использовал понятие ε -окрест-

ности, ссылаясь на Пинкерле. В вариационном исчислении эти понятия были уже известны: в 1879 г. Вейерштрасс дал аналитическое определение «близости двух функций»:

$$|\psi(x) - \Psi(x)| < \varepsilon, \quad \left| \frac{d^k \psi}{dx^k} - \frac{d^k \Psi}{dx^k} \right| < \varepsilon.$$

До него аналогичное определение привел немецкий математик Л. Шеффер, который четко сформулировал понятия сильного и слабого экстремума. По-видимому, первым ученым, который заявил, что выбор множества сравниваемых функций существенно влияет на содержание задачи, был Дюбуа Раймон. После лекций Вейерштрасса эти идеи стали входить в курсы вариационного исчисления.

Интегральные уравнения как обращения преобразований различных частных видов рассматривались в первой половине XIX века Лапласом, Коши, Абелем, Лиувиллем.

Знаменитая задача, которая в 1826 г. привела Абеля к интегральному уравнению, заключалась в следующем: найти в вертикальной плоскости xOz такую кривую, чтобы время свободного падения по ней материальной точки из положения на высоте H до наинизшего положения O на высоте a было заданной функцией $f(x)$. Как показал Абель, задача сводится к уравнению

$$\int_a^x \frac{\varphi(z) dz}{\sqrt{x-z}} = f(x)$$

(к интегральному уравнению первого рода с ядром $1/\sqrt{x-z}$).

Заслуга Вольтерры состоит в том, что он сразу же выделил особый класс функциональных уравнений, поняв, что все разнообразные уравнения принадлежат к одному и тому же виду интегральных уравнений. В 1893–1899 гг. Вольтерра занимался развитием теории линейных интегральных уравнений с переменным верхним пределом. Сначала он рассматривал «уравнения первого рода»:

$$\varphi(x) = u(x) + \int_0^x K(x, \zeta) u(\zeta) d\zeta.$$

Он установил, что решение уравнения можно получить из решения системы n линейных алгебраических уравнений с треугольной матрицей предельным переходом при $n \rightarrow \infty$.

К 1898 г. теория «интегральных уравнений Вольтерры» была построена в таком виде, в каком она излагается в современных учебниках. В 1912 г. Вольтерра прочел курс лекций на эту тему в Париже. Его работы послужили основой для исследований Фредгольма и Гильберта; Гильберт, принципиально не цитировавший математиков «не гёттингенской школы» (он ни разу не называет имени Фредгольма!), не мог не упомянуть работ Вольтерры.

Таким образом, к началу XX века были достигнуты важные результаты по многим направлениям, которые привели к глубоким изменениям структуры математики. Зигмунд-Шульце, например, полагает, что основными предпосылками для создания функционального анализа являются:

- «1. Возникновение теории множеств Кантора (в десятилетие 1874–1884 гг.) и проникновение теории множеств в математику приблизительно с 1897 г.
2. Появление абстрактных, аксиоматических структур, разработка аксиоматического метода (Гильберт, Пеано и другие) и исследования по основаниям математики.
3. Изменение соотношения математики и логики, особенно основание математической формальной логики... в работах Буля (1854) и Фреге (1879)» [75, с. 15].

Насколько естественно в XIX в. (то есть для Пинкерле и Вольтерры) было построение функционального анализа по образцу ТФКП, настолько же естественно в XX в. теоретико-множественное направление исследований Мориса Фреше. «Не отягченный грузом традиций, молодой Фреше приступил к построению функционального анализа по образцу теории функций действительной переменной. Его диссертацией „О некоторых вопросах функционального исчисления“ (1906) можно датировать начало второго этапа...» [33, с. 90].

Фреше, ученик Адамара, вопреки мнению своего учителя, заявил, что *общий анализ одухотворен векторным исчислением*.

Судя по тому, что он писал позже, можно предположить: он полагал, что развиваемая им теория — нечто более общее, чем учение, построенное до него. Трудно отказаться от мысли, что сказало влияние Уилсона. Во время обучения Уилсона в Париже эти молодые люди познакомились-подружились, они состояли в переписке и, очень вероятно, что американец поведал другу и о гениальном ученом — Гиббсе, и о собственных математических интересах... Как бы то ни было, а молодой Фреше уже за-



М. Фреше

явил: «Без работ итальянских математиков, особенно Пинкерле и Вольтерры, общий анализ немыслим...» Добавим также, что Фреше знал работы и Асколи, и Арцела, пытавшихся распространить теорию Кантора для точечных множеств на множества, элементами которых являются функции или кривые.

И Пинкерле, и Вольтерра рассматривали конкретные пространства — классы или пространства действительно- или комплекснозначных функций, — но не множества элементов не определенной точно природы, которые являются объектом изучения в функциональном анализе. Этот подход Фреше выработал уже к 1904 г. В том же году он писал: «...нет необходимости принимать в расчет природу переменных, они <свойства> могут быть установлены для элементов множества, удовлетворяющего определенным адекватным условиям... например, топологии, определенной аксиоматически на множестве...».

Фреше обдуманно ставит задачу абстрагирования общей теории анализа, построения такой теории, которая заключала бы в себе работы его предшественников как частные случаи. Он искал фундаментальные принципы, лежащие в основе теорий Кантора, Вольтерры, Арцела и др. Эту теорию он и называл *общий анализ*. В 1938 г. он писал, сравнивая функциональный анализ и общий анализ: «Но другой дух оживил общий анализ. Тогда как функциональный анализ помещается „под боком“ классического

анализа и находит вывод своих проблем из проблем классического анализа, общий анализ исходит из принципов, которые вызваны векторным исчислением и теорией абстрактных групп.

Вместо действий по аналогии в общем анализе применяют действия „по унификации“.

Вместо сведения одной новой проблемы к уже решенной, в уже решенной проблеме выявляется то, что не является специфическим для этой проблемы. Исключаются ограничения, которые не являются существенными, и таким образом получается прямо и одним махом старое известное решение в качестве решения новой проблемы» [75, с. 21].

Таким образом, уже в самых первых вариантах теории Фреше предусматривал аналогии с векторным исчислением, а несколько позднее он высказывался и более определенно: «Можно рассматривать эти элементы <последовательности действительных чисел> как элементы пространства бесконечного числа измерений. Несколько преимуществ заставляют нас избрать этот путь. Первое преимущество, которое говорит само за себя, — использование геометрического языка, столь привлекательного из-за интуиции... Второе — возможность получить общие результаты, приложимые ко всем... категориям элементов...» [75, с. 42].

В 1903–1904 гг. Фреше готовил к изданию книгу Бореля (о наилучшей аппроксимации непрерывной функции многочленами), попутно он установил минимальное свойство коэффициентов ряда Фурье. Независимо этот результат получил Юнг (1907). Обычно эту теорему не связывают с именем Фреше.

Итак, Фреше построил теорию на базе понятий *окрестность*, *предел*. Определив *ecart* — «отклонение», он ввел понятие, эквивалентное современной «норме»; ему принадлежат понятия *компактность* (несколько отличное от современного), *сепарабельность*. Ф. Хаусдорф, последователь Фреше, предложил термины *метрическое*, *топологическое пространство*. Пинкерле предоставил «заготовки» словаря для теории Фреше.

В эти же годы развернулись исследования Фредгольма и Гильберта по интегральным уравнениям.

Фредгольм, подобно Вольтерре, использует аналогии с системами линейных алгебраических уравнений. Самые ранние исследования бесконечных матриц развились не из работ по интегральным уравнениям: они возникли при определении коэффициентов ряда Фурье, а затем — при определении коэффициентов степенного ряда в работах астронома Хилла и др. К концу XIX века накопилось уже достаточно много исследований уравнения $\Delta u + u = f(x, y)$, которые были связаны с изучением колебания мембраны. Фредгольм существенно использовал работы Вольтерры, Пуанкаре, фон Коха. Его целью было создать полную теорию интегрального уравнения

$$\varphi(x) + \int_0^1 f(x, y)\varphi(y) dy = \psi(x),$$

где функции $f(x, y)$, $\psi(x)$ даны, $\varphi(x)$ — не известна. Четыре статьи Фредгольма (1900–1903) содержали фундаментальные результаты.

За работами Фредгольма последовали статьи Гильберта (1904–1910). Эти шесть статей (с незначительными изменениями) составили книгу «Основы общей теории линейных интегральных уравнений» (1912). В первых трех статьях методы Гильберта еще «традиционны» — он сводит интегральное уравнение к бесконечной системе алгебраических уравнений. Начиная с четвертой статьи (1906), Гильберт развивает теорию бесконечных квадратичных форм, изучает соотношения между преобразованием K и его спектром $\sigma(K)$.

Гильберт предложил термины *спектр*, *точечный спектр*, *непрерывный спектр*. Некоторые понятия и результаты были получены уже раньше... Например, Пинкерле установил, что некоторые классы операторов могут иметь непрерывный спектр. Пуанкаре в 1897 г. ввел параметр λ в интегральное уравнение

$$\varphi(x) + \lambda \int_a^b K(x, y)\varphi(y) dy = \psi(x).$$

Он изучал свойства решения уравнения как функции λ (именно в этой статье им было предложено название *гармоническая функция* для решения уравнения $\Delta u = 0$).

Принципиально новый этап развития теории начался работами фон Неймана, который, в частности, применил теорию Гильберта к квантовой механике. Оказалось, что условное математическое понятие *спектр* связано со спектрами энергетических состояний атомов и элементарных частиц. Как (весьма эмоционально) об этом писал Вейль: «И вот произошло одно из тех событий, непредсказуемых даже самым смелым воображением, которое могло бы вызвать искушение поверить в предустановленную гармонию между физической природой и математическим образом мышления: через 20 лет после исследований Гильберта *квантовая механика* обнаружила, что наблюдаемые геометрической системы могут быть представлены линейными симметричными операторами в гильбертовом пространстве и что собственные значения и собственные векторы того оператора, который представляет собой *энергию*, являются энергетическими уровнями и соответствующими квантовыми состояниями системы.

Конечно, эта квантово-физическая интерпретация сильно повысила интерес к теории и привела к более тщательному исследованию ее, давшему многочисленные упрощения и обобщения» [8, с. 29].

Гильберт был очень удивлен: «Я развил мою теорию... в чисто математических интересах и даже назвал ее „спектральным анализом“ без какого-либо предчувствия, что позднее будет найдено приложение к действительным спектрам в физике».

Он ввел важные понятия «слабая сходимость», «полная ортогональная система функций»; его работа — источник теории гильбертова пространства, банахова пространства, теории линейных операторов.

Историки математики до сих пор волнует вопрос: был ли Гильберт знаком в этот период (1904–1910) или по крайней мере в первые годы этого периода с идеей бесконечномерного пространства, которое уже было введено в итальянской школе?

Ни в одной работе он не ссылается на *пространство* или *функциональное пространство*.

1. В работах Гильберта не введено никаких геометрических понятий в бесконечномерном пространстве.
2. Он даже не использовал слово «пространство», не упоминал свойства линейности рассматриваемых множеств.
3. В его работах нет никаких указаний относительно *бесконечномерной геометрии*.

Монна отвечает на эти вопросы так: «В работах Гильберта, Рисса и Хелли постепенно выкристаллизовалось понятие линейного пространства, пространства функционалов и операторов. Курьезно, что эти понятия уже были в математике, даже в абстрактной аксиоматической форме в итальянской школе. Но у Гильберта, Рисса и Хелли с трудом можно найти ссылки на работы Пеано, Пинкерле и Вольтерры... По какой же причине понятие линейного пространства, аксиоматически определенно, стало более или менее общим средством в математике только после 1920 г.? Из свидетельств современников (по другим поводам) складывается впечатление, что причина — ревнивая охрана Гильбертом приоритета исследований Геттингенской школы, результатом и было замалчивание работ иностранных коллег...» [70, с. 70].

«У Гильберта... последовательности действительных чисел (x_k) такие, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2$$

сходится. В этом... оправдание термина *гильбертово пространство*. Что касается введения пространства функций, то кажется, что Шмидт ближе к современной точке зрения, чем Гильберт, в статье 1908 г. он ввел *lineare Funktionengebilde* также без ссылок на итальянцев...» [70, с. 35–40].

Термин *гильбертово пространство* впервые употребил А. Шёнфлис (1908). Его повторил Рисс в своей книге «Системы уравнений с бесконечным числом неизвестных» (1913): «Рас-

смотрим пространство Гильберта; мы понимаем под этим множество систем (x_k) таких, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2$$

сходится...» Рисс ввел в 1907 также названия *сильная и слабая сходимости* (термин *сходимость в среднем* принадлежит Фишеру), *суммируемая функция*, *суммируемая с квадратом*, обозначения L^2 , L^p (по первой букве фамилии Лебега, поскольку использовались интегралы Лебега). Исторически статьи Рисса (1907–1911) положили начало развитию теории гильбертовых пространств, которые не являлись пространством последовательностей. Теорема Рисса—Фишера подготовила создание аксиоматики Джона фон Неймана. Его аксиомы 1929 г. выглядели как прямое обобщение аксиом для конечномерных пространств. «Многие авторы и сам фон Нейман относят аксиомы <линейности и существования внутреннего произведения>... Герману Вейлю, который опубликовал их в 1923 г. Однако уже в 1920 г. Винер обнародовал очень общую систему аксиом для того, что он называл *espace vectoriel*. Также Банах опубликовал в 1932 г. книгу „*Théorie des opérations linéaires*“, отмечающую эпоху в развитии функционального анализа» [51, с. 79].

Вероятно, приведенной цитаты достаточно, чтобы убедиться, насколько полно использовалось «Приложение» Пеано к началу XX в.

Наконец, перейдем к работам ученика Гильберта — Эрхардта Шмидта. Общеизвестно, что наибольшее значение в математике гильбертова пространства имело введение Шмидтом геометрического языка в пространство последовательностей (1908), значение, несоизмеримое с собственно математическими результатами его работ.



С. Банах

Несмотря на то, что первая глава статьи Шмидта называется «Geometrie in einem Funktionenraum», он избегает слов *пространство* и *вектор* в тексте. Однако из некоторых его замечаний видно, что он хорошо знаком с этими понятиями и имеет их постоянно «перед глазами» в качестве образца: «Я признателен Г. Ковалевскому за указание на геометрический смысл развитых в этой главе понятий и теорем. Этот смысл выступит еще яснее, если определить $A(x)$ не как функцию, а как вектор в пространстве бесконечного числа измерений. В основе лежат определения длины $\|A\|$ и ортогональности, введенные в геометрию Штуди».

Добавим, что во время написания этой статьи Шмидт работал в Бонне вместе с Г. Ковалевским; там же работал и Штуди, по его рекомендации Шмидт был приглашен в Бонн. Кроме этих обстоятельств, кажется, нет оснований ссылаться именно на Штуди, вводя понятия нормы и ортогональности. Зато знаменательно, что в это же время в Бонне работал А. Бухерер — автор первой в Европе книги по векторному анализу! («Elemente der Vektor-Analyse mit Beispielen aus der theoretischen Physik», 1903.)

Подготавливая издание своих трудов и делая некоторый обзор, Пинкерле писал: «Я подошел вплотную к рассмотрению множества степенных рядов как пространства, в котором каждый ряд есть точка, и я наметил эскиз геометрии этого пространства, которая позволила *привнести* в эти исследования определенную степень интуиции:

- 1) о геометрии функционального пространства,
- 2) о понятии бесконечномерного пространства (1896–1898)» [33, с. 58].

После этих слов надо признать, что Шмидту принадлежит лишь заслуга изложения теории Гильберта на этом новом языке Пинкерле.

Шмидт называет последовательность *нормированной*, если

$$\sum_{x=1}^{\infty} |A(x)|^2 = 1.$$

Ему принадлежит обозначение для нормы $\| \quad \|$; слово *норма* он не употребляет. Это слово было очень распространено в XIX в.

и употреблялось в самых разных смыслах: *норма*, *модуль*, *абсолютное значение* означали одно и то же.

В функциональном анализе терминология долго не устанавливалась. В 1906 г. Фреше ввел *ecart* — «отклонение» в классе функций; затем он писал о *длине*. В 1912 г. Хелли определяет *Maximalzahl*, то есть норму функционала. Даже к 1930 г. нет единообразия в языке: фон Нейман использует термин *Betrag*.

Любопытно, что уже в 1910 г. в Цюрихе была защищена диссертация «О геометрическом языке исследований Шмидта» (П. Набхольц). Идеи Шмидта получили немедленное и самое высокое признание; в комментариях к третьему тому сочинений Гильберта о его ученике сказано: «Э. Шмидт... дал новое обоснование гильбертовой теории собственных значений, которое является непревзойденным по краткости и наглядности и которое имело величайшее влияние на дальнейшее развитие теории».

Если эти лестные слова по справедливости разделить между Пинкерле, Шмидтом и векторным исчислением, то и тогда на долю векторного исчисления, этой нити Ариадны в развитии функционального анализа, остается совсем немало!

Глава 13

«Знакомство с векторным исчислением начинает распространяться и в нашем Союзе»

Я. Н. Шпильрейн

В России математики познакомились с теорией кватернионов вскоре после ее рождения. Павел Эмильевич Ромер проявил интерес к исчислению еще в то время, когда оно только формировалось. В его книге «Основания начала метода кватернёнов» (Киев, 1867 г.) сообщается о предполагаемом издании «Элементарного трактата» Тэта. Так что ясно: существовали непосредственные связи между учеными. В Киевском университете был прочитан, по-видимому, первый на континенте курс по теории кватернионов. В вводных разделах книги Ромер высказывает мысли о роли и значении теории кватернионов, поразительно близкие Гамильтону и Тэту: «...<исчисление> основано на той мысли, что для определения положения данной точки в пространстве относительно другой выгоднее брать вместо



Я. Шпильрейн

трех уравнений аналитической геометрии одну прямую линию, *вектор*, заключающую в себе самой зараз понятия о направлении и длине. В геометрии с прямою обыкновенно связывают только понятие о длине; приписывая же ей и направление, мы избегаем необходимости выражать его относительно известных осей координат; эти оси вместе со сложным процессом преобразования их систем становятся излишними, и в каждом вопросе непосредственно войдут в вычисление только линии, существенно ему принадлежащие.

Изменение понятия о прямых линиях заставило Гамильтона изменить и смысл алгебраических действий над ними. Сложение он определяет аналогично сложению сил в механике, а умножение и деление привели его к особенному символическому выражению — кватернёну... и вместе с тем, к чрезвычайно простому представлению о мнимых величинах» [37, с. 1].

Мы видим не очень-то понятное самому автору изложение сути учения, но видим, кроме этого, что Ромер излагает тот подход к теории, который Гамильтон будет развивать в «Элементах теории кватернионов»! А Ромер пишет об этом тогда, когда имеется единственный труд — «Лекции о кватернионах».

Чрезвычайно интересна и следующая (также «созвучная» идеям Гамильтона) оценка места учения в математике: «Кватернены могут быть тесно связаны с декартовой системой координат, всего удобнее заменяют ее и потому необходимо захватывают все ветви математического анализа, насколько в них входит геометрия. Большое разнообразие преобразований, также сжатость вычислений и формул, простота их значения, например, в поверхностях второго порядка, диаметральных, касательных плоскостях и т. д. заслуживают особенного внимания в числе геометрических приложений этого нового способа. Не менее удачны и опыты его приложения, сделанные самим Гамильтоном

и эдинбургским профессором Tait'ом (1864), к наукам физическим» [37, с. 3].

Возможно математики того времени понимали Ромера лучше современного читателя, уже знакомого с векторами (единственный пробел — Ромер не вводил в теорию символический вектор ∇).

Эта книга, безусловно, определила язык русских математических работ, связанных с векторным исчислением: *вектор, компланарность, нормаль, модуль вектора* (вместо «тензора» Гамильтона и Тэта), *переместительный, ассоциативный законы*. Ромер одним из первых ввел эти слова в русскую литературу — поскольку он приводит в скобках и соответствующие английские термины, то ясно, что они еще не были привычными.

Менее интересны, последовательны и строги изложения основ векторного исчисления в книгах В. П. Ермакова и Д. Н. Зейлигера.

Василий Петрович Ермаков окончил Киевский университет 1868 г. Имя его известно в математике, так как он изобрел критерий сходимости числовых рядов. Он был учеником Ващенко-Захарченко, Рахманинова, Ромера — отсюда интерес Ермакова к векторному исчислению. Когда составлялась программа поездки Ермакова за границу для завершения образования (1871), было запланировано *обязательное* посещение лекций Тэта в Эдинбурге.

Его кандидатское сочинение называлось «Теория векторов на плоскости»; Ермаков излагает эту теорию «как частный случай более общего метода — кватернёнов». Забавно, что понадобилось это изложение при наличии развитой ТФКП. Теория Ермакова неполна хотя бы потому, что невозможно определить произведение векторов, не выходя из плоскости. Правда, очень интересно его векторное изложение учения о конических сечениях — первое на русском языке.

Дмитрий Николаевич Зейлигер, издавший небольшое пособие «Механика подобно изменяемой системы» (Одесса, 1890), привел в первом выпуске необходимый векторный аппарат, т. е. дал очень ограниченную часть теории.

Владимир Павлович Максимович работал в Казанском и Киевском университетах; он был первым ректором Киевского университета. Ему принадлежат работы по дифференциальным уравнениям и ТФКП. Что касается первого направления, то Максимович доказал в 1885 г. невозможность решения в квадратурах общего линейного уравнения второго порядка. Во второй области он также имеет очень важные труды и относится к тем преподавателям, которые начали читать первые курсы ТФКП в России. Кроме него в Петербурге такой курс читал Ю. В. Сохоцкий (1869), в Москве — А. Ю. Давидов (1864), в Киеве — М. Е. Ващенко-Захарченко, в Харькове — Д. М. Деларю (1874), в Одессе — И. В. Слешинский (1889), а затем И. Ю. Тимченко.

Сочинение Максимовича «Новая теория Гамильтоновых пар и соответственное обобщение теории мнимого переменного» (Казань, 1884) содержит и обзор работ по теории гиперкомплексных чисел (не только Гамильтона), и критический разбор основ теории кватернионов и отдельных положений, «защищаемых Гамильтоном», и более строгое, чем у Гамильтона, изложение теории пар чисел. Из всего этого интересного сочинения процитируем только одну фразу. Дело в том, что в «Лекциях о кватернионах» Гамильтона необычайно много курсива, выделения слов — большими печатными буквами, разрядкой и пр. Кажется, что на некоторых страницах тем или иным способом выделяется половина текста. Воспроизведя страницу из «Лекций о кватернионах», Максимович добавляет: «Наш перевод — подстрочный и все курсивы принадлежат подлиннику, хотя он отмечает именно те места, на которые мы сами бы желали обратить особое внимание читателя». Это последние слова книги. Это относится и к нашему изложению (глава 2).

Отметим еще, что и к тому времени терминология все еще не вполне установилась — через 20 лет после сочинения Ромера употребляются названия «распределительность», «собираемость» умножения.

Наибольший интерес для истории векторного исчисления в России представляют работы Осипа (Иосифа) Ивановича Сомова*.

* Художник К. Сомов был племянником Осипа Ивановича.

Он окончил Московский университет и преподавал в Москве. В 1841 г. Сомов переехал в Петербург. В Петербургском университете он впервые (1847) поставил курс теории аналитических функций, в которой ему принадлежат важные результаты (так же как и в механике, в вариационных принципах механики).

Хорошо известно, какую решающую эвристическую роль сыграли кинематические соображения при создании дифференциального исчисления. Но в дальнейшем, благодаря трудам Эйлера и Лагранжа, механика была сведена к математическому анализу. Лейбниц в свое время пытался создать геометрическое исчисление, которое (помимо всего прочего) позволило бы «трактовать механику почти как геометрию». Лагранж же считал достоинством своей «Аналитической механики» (1788) именно «антигеометричность» и писал в предисловии к первому изданию: «В этой работе совершенно отсутствуют какие бы то ни было чертежи. Излагаемые мною методы не требуют ни построений, ни геометрических или механических рассуждений; они требуют только алгебраических операций, подчиненных планомерному и единообразному ходу». Методы аналитической механики господствовали настолько, что в 1914 г. писали: «Нам трудно понять, как Ньютон и английские математики оперировали непосредственно с величинами, не разлагая их на составляющие...»

Попытки возврата к геометрическим методам изучения движения появляются в трудах Гаспара Монжа и Лазара Карно. В «*Essai sur les machines en general*» (1783) Карно ввел понятия «геометрического количества», эквивалентного векторной величине, «геометрической суммы», «геометрической скорости». Идеи «геометрического исчисления» он развил в «Геометрии положения» (1803). О таком изложении механики он писал: «Геометрическая теория движения является очень важной наукой; она занимает промежуточное положение между обыкновенной геометрией и механикой».

Первая попытка изложить механику на векторном языке была сделана Сен-Венаном. Пожалуй, это почти закономерный факт — новое изложение должен был дать нестандартно мыс-

лящий ученый; именно таким человеком был Барре де Адемар Жан Клод Сен-Венан.

Сен-Венан был студентом Политехнической школы. В 1814 г., когда была объявлена мобилизация студентов, он отказался сражаться за Наполеона, считая его узурпатором. Этот поступок закрыл ему путь в высшую школу; лишь в 1823 г. по специальному распоряжению министра внутренних дел Сен-Венан был принят в Школу мостов и дорог, где его ожидал бойкот учащихся.

Человек гипертрофированной скромности, Сен-Венан каким-то образом сочетал с ней независимость характера, а также работоспособность, любовь к своему делу. В дифференциальной геометрии Сен-Венан ввел понятие *бинормали*. В короткой статье (1845) им даны определения *геометрической суммы*, *дифференциала*, *произведения геометрических величин*. В частности, произведением двух отрезков Сен-Венан называл ориентированную площадь параллелограмма, образованного этими отрезками.

В 1841 г. Понселе ввел понятие *геометрического ускорения*. Анри Резаль, ученик Понселе, по образованию инженер, также использовал векторные методы, правда, эпизодически, в основном как элементы графических построений. Тем не менее именно из его «Трактата по чистой кинематике» (1862) элементы *геометрического исчисления* стали широко известны; эта работа определенно дала толчок развитию геометрических методов в механике. Резаля цитировали Пеано, Массо, О. И. Сомов. Резаль тоже использовал термин «геометрическое произведение», но понимал под этим нынешнее скалярное произведение.

Несомненно, идеи Резаля послужили отправной точкой для О. И. Сомова, который прочитал в декабре 1863 г. доклад «Об ускорениях различных порядков» (опубликован в 1864 г.). В нем наряду с *геометрической суммой* величин была определена векторная функция скалярного аргумента, ее производная, а о возможностях предлагаемого аппарата сказано: «Эти начала во многих отношениях расширяют средства аналитической механики, доставляя возможность исследовать свойства кривых линий и обстоятельства движения или независимо от координат, или в координатах произвольных».

Еще две статьи Сомова посвящены развитию и усовершенствованию метода (1865, 1866). Сомов использует терминологию и понятия работ Резаля и Ламé. В частности его *геометрическое произведение* имеет тот же смысл, что и у Резаля. Сомов приводит формулу

$$uv \cos (uv) = ax + by + cz,$$

которой не было у Резаля, так же как и

$$\frac{d}{dt}(uv) = u'v \cos (uv) + v'u \cos (uv).$$

В статье «Прямой способ для выражения дифференциальных параметров первого и второго порядков и кривизна поверхности в каких-либо координатах ортогональных или косоугольных» Сомов представляет *дифференциальный параметр* Ламе в виде вектора P , нормального к поверхности $\varphi = \text{const}$.

В Петербургском университете курс теоретической механики начали читать с 1819 г.; первым преподавателем был Д. С. Чижев. С 1847 г. лектором стал Сомов. В 1865 г. он начал излагать в курсе механики основы геометрического исчисления; его лекции были литографированы в 1872 г. (в 1872 г. Гиббс и Хевисайд только приступали к научным занятиям, которые приведут их к векторному анализу!). Сомов широко использует в доказательствах чертежи, геометрические соображения, однако оперирует лишь с проекциями соответствующих векторных величин на какую-нибудь ось, а не с самими векторами. С 1872 г. начинается не ограниченное «соображениями строгости» использование «геометрических равенств» (с обозначениями Резаля: a — вектор, a — его длина. По существу, Сомов оперировал с величиной, эквивалентной векторному произведению, но обошелся без явного определения.

Лекции Сомова были опубликованы: «Рациональная механика» (1872) — первая часть; вторая часть — в двух выпусках (1874, 1877). В 1878 г. книга была переведена на немецкий язык А. Циветом и получила широкую известность за границей — в научной литературе ссылки на нее встречаются постоянно.

Никогда и ни у кого не возникало сомнения в оригинальности трудов Сомова. Очевидно, что он исходил из «Чистой кинематики» Резаля и на этом фундаменте построил свой курс, развив основные «геометрические понятия». Естественные для механиков понятия работы, проекции силы, ускорения... весьма далеки от теории гиперкомплексных чисел, вряд ли Сомов знал, что работа равна $-S \cdot \text{шр}$.

Довольно естественно, что такой же круг научных интересов имел и сын Сомова — Павел Осипович, о работах которого мы будем говорить ниже.

Физики в России, как и во всем мире, узнали о векторном исчислении при изучении теории Максвелла. В русских университетах электромагнитную теорию впервые начали преподавать Александр Георгиевич Столетов и Николай Алексеевич Умов. Интересно, что физики, признавшие учение Максвелла, готовы были принять и его механистическую модель как «обоснование» теории (даже после опытов Герца). Как мы знаем, к ним относился Больцман. Вот еще «защитник» Максвелла: «О значении собственно *моделей*, в смысле приближенного воспроизведения действительности... этот прием употреблялся издавна: такими моделями являются в физике наши „абсолютно твердые тела“, наши „совершенные жидкости“ и т. п. Всем известны так называемые *графики*... Здесь мы имеем своего рода модель... и модель не имеет претензии *совпадать* — хотя бы приблизительно — с тем, что она изображает; она есть только условное изображение.

Мы можем вообразить себе (или действительно сделать) такую механическую модель, где, например, „силы тока“ изображались бы пропорциональными скоростями движения, „потенциалы“ — величинами давлений и т. д. Если рассуждая над такой моделью, мы придем к новым выводам о ее свойствах, которые оправдаются соответственными физиками и на прототипе (т. е. в действительном явлении), мы скажем, что построили пригодную модель», — это пишет А. Г. Столетов (возможно, под влиянием обаяния Максвелла — ведь Столетов присутствовал при открытии Кавендишской лаборатории). В его статье о Гельмгольце (!) есть восторженные строки о Максвелле: «Открытия

[Герца. — Н. А.] были победою теории Максвелла, и тот мост между Светом и Электричеством, который существовал дотоле только в гениальном уме английского физика, получил реальные устои».

Умов начал педагогическую деятельность в Одессе, а с 1893 г. стал профессором Московского университета. В Новороссийском университете он читал курс «такой новой и неустоявшейся науки, как математическая физика» (из отзыва о нем — 1872 г.). В 1911 г. Умов покинул университет вместе с группой преподавателей в знак протеста против действий министра просвещения. Мы располагаем литографированными лекциями Умова 1878 и 1895 гг. и изданным в 1901, 1902 гг. «Курсом физики», «изданием, предназначенным исключительно для слушателей автора».

Умов написал подробный исторический очерк о теориях электричества, который он начинает с гипотезы Франклина о том, что существует «чрезвычайно тонкая электрическая жидкость; избыток ее над нормальным для каждого тела количеством обнаруживается как положительное электрическое состояние, недостаток — как отрицательное». Затем упоминает гипотезу о двух электрических жидкостях — положительной и отрицательной (1759). Под теорией Максвелла он понимает, по-видимому, объяснение явлений посредством механической модели. В таком случае она не более, чем «чрезвычайно плодотворный взгляд...», а опыты Герца могут быть отделены от теории Максвелла и наряду с методами Больцмана излагаться как самостоятельные разделы.

Интересно, что исчисление векторов Умов воспринимает как исчисление кватернионов. Название *тензор* для длины вектора (название естественное для оператора растяжения) он переводит на русский язык словом «напряжение» и употребляет его без каких-либо пояснений. Поэтому можно сказать, что в разных лекциях векторы Умова непонятны по-разному.

В лекциях 1878 г. векторы вводятся неторопливо и подробно, но «результатирующим вектором» оказывается $\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$. В 1895 г. в литографированном издании работы «Электричество и магнетизм» Умов развивает теорию сначала в духе уравнений

математической физики, а затем появляются векторные величины, определенные почти невразумительно следующими словами: «Скалярная величина определяется положением точки. С представлением же о векторах мы соединяем представление о напряженности и направлении. Если в какой-нибудь точке пространства имеем ряд векторов, то они складываются по правилам геометрического сложения, так что результирующий вектор

$$R = \sum A.$$

Силы следуют этому правилу сложения. Каждый вектор можно рассматривать как геометрическую сумму его слагающих по осям» [Умов Н. А. Электричество и магнетизм. 1895. с. 157]. А дальше: « $i(A + B) + jC$. Знак $+$ внутри скобок означает алгебраическое сложение, а вне скобок — геометрическое». По-видимому, сегодня почти невозможно представить трудности восприятия и преподавания векторного исчисления в начале XX в.

Фундаментально новое понятие — понятие *поля* — Умов вводит на первых страницах, дословно повторяя одно из определений Максвелла. Однако из дальнейшего ясно, что он не вполне овладел новыми понятиями: «Если поле заполнено однородными средами, занимающими конечные объемы...» В изложении Умова *поле* почти неотличимо от области определения: «Векторы, характеризующие физическое состояние поля, суть функции однозначные, т. е. такие, которые в каждой точке поля имеют одно определенное значение». В тексте встречаются даже «поле односвязное», «поле многосвязное». Приведем, однако, еще одну теорему: «Двойной интеграл

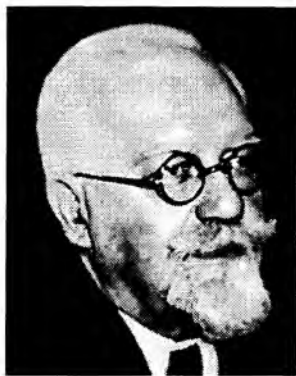
$$\varepsilon \iint R \cos \varphi \, d\sigma,$$

взятый по какой-нибудь поверхности σ , представляет собой объем элементов поля, прошедших через поверхность σ при бесконечно малом перемещении точек поля по векторным линиям. Выражение называется поэтому *протечением* через поверхность» (1878).

Эти выдержки с достаточной полнотой характеризуют представления Умова (и его слушателей) о «теории поля» (множитель ϵ , видимо, введен для того, чтобы «перемещение элементов поля» было действительно бесконечно малым?).

Совсем другого уровня были работы Владимира Сергеевича Игнатовского — представителя следующего поколения физиков. И все же, рассматривая их, мы еще раз убеждаемся, каким непростым был переход к векторным методам исследования и изложения...

Сведения об Игнатовском удалось найти в книге «Архипелаг Гулаг»: «Член-корреспондент академии наук Игнатовский арестован в Ленинграде в 1941 г. и обвинен, что завербован немецкой разведкой во время работы своей у Цейса в 1908 году! — притом с таким странным заданием: в ближайшую войну (которая интересует это поколение разведки) не шпионить, а только в следующую. Поэтому он верно служит царю в 1-ю мировую войну, потом советской власти, налаживает единственный в стране оптико-механический завод (ГОМЗ), избирается в академию наук, — а вот с начала второй мировой войны пойман, обезврежен, расстрелян!»



В. С. Игнатовский

Первая работа Игнатовского «Решение некоторых вопросов электростатики и электродинамики при помощи учения о векторах» (1902) — литографированное издание и, хотя оно мало доступно, его упоминает Кроу в числе первых физических исследований векторными методами. Приведем почти полностью предисловие:

«...Выходя из принципа сохранения энергии, я пришел к уравнениям Максвелла, и приняв их за основание, нашел такой их интеграл, который позволяет легко переходить к различным частным случаям.

...При изложении учения о векторах оба автора <Хевисайд и Фёппль> старались ввести физическую подкладку, тем самым ограничивая общность; между тем как учение о векторах выра-

жает собою некоторые свойства пространства, независимо от каких бы то ни было физических явлений.

Так как все явления природы происходят в пространстве, то ясно, что эти свойства пространства замечаются и при наблюдении данных явлений, откуда понятно, что все формулы, выведенные из подобных наблюдений, могут скорее *описать*, а не объяснить явления, и это описание будет тем более точными и незыблемым, чем оно ближе подходит к общим свойствам пространства. В особенности это резко замечается в электродинамике.

...Учение о векторах дает нам возможность наглядно и удобно исследовать эти свойства. Я сказал *исследовать*, а не *изобразить* именно потому, чтобы указать на то, что учение о векторах не есть *символическое* исчисление, дающее нам возможность при помощи некоторых символов сокращенно производить сложные математические операции. Напротив, учение о векторах вводит такие величины и понятия, с которыми необходимо оперировать по определенным законам, которые дают нам возможность наглядно *исследовать* свойства пространства.

Привожу список авторов, сочинения которых легли в основу моей работы, причем на первое место я должен поставить О. Неависиде, справедливо считающегося основателем учения о векторах» [18, с. IV].

В этом списке 9 имен (и каких!): Хевисайд, Фёппль, Вебстер, Пуанкаре, Планк, Стефан, Стеклов... Обратим внимание на то, что не упомянуты работы Максвелла, а также на то, что создание учения о векторах уже стало историей и эта история забыта: «основателем» учения назван Хевисайд, а ведь и десяти лет не прошло со времени полемики «Векторы против Кватернионов», еще живы и Гиббс, и Хевисайд, и Нотт!!

Часть I «Учение о векторах» построена по привычному для нас плану: векторы вводятся так, как это заведено Максвеллом: «Все величины, с которыми мы встречаемся при изучении физики, можно разделить на два класса: на скаляры и на векторы. Возьмем объем, площадь, различные коэффициенты и т. д.

Напротив, такие величины, как сила, скорость и т. д., показывают нам кроме некоторого отношения еще и определенное

направление в пространстве. В этом и заключается коренное различие величин последнего рода от величин первого.

...Вектор для своего определения требует трех данных».

А дальше говорится о необходимости векторов в науке почти словами Хевисайда: «Итак, оперируя с векторами, нам для каждого из них необходимо пользоваться тремя уравнениями, его определяющими. Это в большинстве случаев осложняет вопрос и, кроме того, наглядность в высшей степени теряется. И вот, пользуясь учением о векторах, значительно облегчается непосредственное оперирование с векторами, потому что дает возможность определить вектор не тремя, а одним уравнением $A = a_0 \cdot A$ » [18, с. 3].

В этом сочинении термины — английские (вектор, тензор) обозначения — англо-французские (A , A , i , j , k , ∇ , div , curl) и «русские» чертежи, так как до Сомова и Игнатовского стрелки на чертежах рисовали где-то рядом со стороной параллелограмма, с контуром интегрирования... на середине стороны...

У Игнатовского мы находим странное сочетание математического определения и физического обоснования, когда он вводит произведения двух векторов. «Необходимо помнить, что под произведением двух векторов мы не должны понимать что-либо трансцендентное, но, повторяю, принять просто эти произведения на основании вышеприведенных определений. Введение подобных понятий и определений оправдывается, с одной стороны, рассуждениями, приведенными на страницах... а с другой — тем, что подобные произведения часто встречаются в применении и именно в том смысле, какой мы им придали. Читатель увидит из всего последующего, что введение подобных определений значительно облегчает действие над векторами и нигде не противоречит каким бы то ни было геометрическим или физическим понятиям» [18, с. 19].

Дадим общую характеристику дальнейшему содержанию.

Введено корректное определение поля:

«Положим, мы имеем некоторый скаляр A , имеющий различные значения в различных точках пространства и могущий также зависеть от времени...»

Введен «новый вектор

$$\nabla A = i \frac{\partial A}{\partial x} + j \frac{\partial A}{\partial y} + k \frac{\partial A}{\partial z}$$

— градиент скаляра A », а затем — символический вектор

$$\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z};$$

рассмотрены операции $\nabla \cdot A = \text{div } A$ и $\nabla A = \text{curl } A$, введенные чисто формально (и здесь мы видим смесь обозначений...).

Далее рассмотрены физические примеры, иллюстрирующие понятия, и излагается материал, который в современных программах математических курсов называется «теория поля». Примеры, выводы формул часто взяты из «Электромагнитной теории» Хевисайда. Вот образец доказательства в духе Хевисайда: «Можно рассматривать ∇ как некоторый дифференциальный множитель, который в применении к скаляру показывает величину и направление наибольшего его изменения <так у Игнатовского>... Так как изменение скаляра *не зависит*, очевидно, от принятой системы координат, то отсюда следует, что вектор ∇A , а следовательно и множитель ∇ , *не зависит от принятой системы координат*».

Язык этого сочинения вполне современный (это означает, что современный язык вполне позаимствован у Игнатовского — в самом деле, кажется, именно он ввел в русский язык *линии вектора*, *умножим скалярно*, перевел *Quelle* как «источник» и др.), непривычны только «векториальный» и «корлевой» — вместо «вихревой» («Разложение вектора на потенциальную и корлевую часть...» от curl). «Векториальный» же употреблялся в русском языке еще и в 30-е гг.

Это сочинение представляет наибольший интерес для истории предмета (и особенно для русских читателей). Но вот следующая работа Игнатовского — книга «Die Vektoranalysis und ihre Anwendung in der theoretischen Physik» (Leipzig-Berlin, 1909), выдержавшая несколько изданий (2-е — 1910 г., 3-е — 1926 г.), является оригинальным творением. Появление этой книги не случайно: с 1905 г. по 1914 г. в немецких журналах систематически

публиковались статьи Игнатовского (их больше 20). В предисловии Игнатовский писал: «Несмотря на имеющееся уже большое число сочинений по векторному анализу, я охотно откликнулся на предложение... из-за фундаментального значения векторного анализа для развития теоретической физики. С другой стороны, я надеюсь также дать в этой книге нечто новое, что тотчас заметит осведомленный читатель...»

Это «новое» — реализованная мечта Тэта! А именно, теория изложена без введения системы координат и без использования формул с координатами. Эту идею никто не мог подсказать Игнатовскому: Хевисайда не интересовало векторное исчисление само по себе. Это же мы видим и в книге Фёппля, так как ему важна только эффективность векторных методов: «...читатель освоит математический инструмент, без которого ему не обойтись при изучении электрических и магнитных полей». Да и координаты у Фёппля играют свою обычную роль с первой до последней страницы книги. Единственным намеком мог бы служить параграф, приведенный Фёпплем, «17. Оператор ∇ ». Здесь сформулирована и доказана теорема « ∇ не зависит от системы координат». Но в доказательстве существенно используются координаты: наряду с x, y, z введена система x', y', z' и непосредственным вычислением (с заменой переменных) показано $\nabla = \nabla'$.

Основная идея труда владела Игнатовским уже в 1902 г. (хотя та первая работа по научному уровню несопоставима с обсуждаемой). Незначительные терминологические изменения сразу же «модернизировали» изложение: *компланарность*, *поле*, *Betrag* вместо «тензор», новое обозначение длины вектора — $|A|$. Может быть, данью немецкому издательству были обозначения — готическими буквами, скобками [] как у Грассмана, и названия «скалярное или внутреннее произведение», «некомпланарные или *ebenfremden* направления».

Книга явно повлияла на изложение теории в немецкой литературе; определения Игнатовского были повторены буквально в вышедших затем книгах, в первую очередь — в появившейся вскоре книге профессора физики в Кенигсберге Рихарда Ганса «Vektoranalysis. Mit Anwendungen auf Physik und Technik». Автор

внес существенные изменения в текст после появления книги Игнатовского (1-е изд. Ганса — 1905 г., 7-е — 1950 г.).

Непреходящее значение для введения в русскую математическую литературу и в преподавание имела книга П. О. Сомова «Векториальный анализ и его приложения» (1907). Павел Осипович Сомов, как и его отец, был математиком, работал в Варшаве в 1887–1904 гг., а затем — в Петербурге, где читал в университете лекции по «векториальному анализу» (впервые в России) и «статике твердого тела» (в векторном изложении), он преподавал также на Высших женских курсах.

Его книга — одна из лучших в мировой литературе книг «первого поколения» по векторному исчислению; ее высоко оценивает и Кроу, называя в числе 12 лучших руководств.

П. О. Сомов был знаком со всеми исследованиями по теории кватернионов, линейному учению о протяжности и векторному анализу, которые он проанализировал добросовестно и грамотно (в отличие от очень многих авторов, знакомившихся с векторным исчислением по Фёпплю или Хевисайду, а с учением Грассмана по Пеано...). В труде Сомова настолько полно охвачены и современно изложены все разделы учения, что легче перечислить, чего в нем нет. Нет точки зрения Клейна (или «Эрлангенской программы»).

Книга чрезвычайно интересна как свидетельство состояния науки в начале XX в. и как история формирования русской терминологии и традиций преподавания в этой области математики. Большое введение (8 страниц) подготавливает читателя к новым понятиям, новым точкам зрения и, таким образом, помогает преодолеть вполне реальные трудности.

«Представление о векторе является естественным образом при изучении всяких физических явлений, в которых играет какую-либо роль направление движения или вообще направление изменения в состоянии тела или физической среды...

Вектор представляет собой понятие сложное, заключающее в себе понятие о числе и понятие о направлении, а часто кроме того и понятие о положении в пространстве. Уже с давних пор... делают построения, в которых основным элементом явля-

ется вектор; но лишь в сравнительно недавнее время стали рассматривать вектор как такой элемент, который можно включать и в формулы. Такие формулы называются *векториальными*...

...другое направление, более новое, возникло одновременно с учением о „векториальном поле“ и развилось благодаря трудам Максвелла, Хевисайда, Джиббса, Фёппля и др. Оно отличается большею простотой и наглядностью и поэтому с большим успехом применяется к решению вопросов геометрии, механики, физики и их приложений» [38, с. IV]. Можно заметить, что к «старому направлению» отнесены сразу все «геометрические исчисления» (даже разительно отличающиеся друг от друга). В исторических замечаниях единственный раз упоминается О. И. Сомов (хотя сын мог лучше других оценить истинные заслуги отца).

«Нужно иметь в виду, что вектор является при этом *основным элементом по самому существу дела*.

...Достаточно, если из приложений будет выясняться основное положение, оправдывающее векториальный анализ как самостоятельную область исследования, и состоящее в том, что в огромной области физико-математических наук вектор является основным и естественным элементом при изображении физического явления и при его исследовании» [38, с. V].

Значительный раздел книги посвящен теории линейных преобразований в форме, развитой Гиббсом. Как обычно, П. О. Сомов начинает историческим введением: «Теория линейных векториальных функций весьма обстоятельно и притом в оригинальной форме разработана Джиббсом (Gibbs) в его „Vector Analysis“. Его символическая метода по своей общности, удобству приложений, в особенности в более сложных случаях, наконец, ввиду ее родства с теорией кватернионов Гамильтона, перед которой она, однако же, имеет несомненные преимущества, заслуживает того, чтобы на ней остановиться» [38, с. 257].

Вводя определения, Сомов, как правило, приводит все термины, употребляющиеся в литературе, заранее оговорив в предисловии: «Термины и символы в векториальном анализе еще далеко не установились, в особенности же в русской литературе» [38, с. IV]. Наша терминология, таким образом, сформирована,

в основном, благодаря этим двум ученым — В. С. Игнатовскому и П. О. Сомову.

П. О. Сомов вводит термины *скаляр*, *вектор*, *орт* («удобный по своей краткости»), а также русские названия для *свободного вектора* (в 1904 г. он еще назывался «переносной»), *приложенного* (раньше — «передвижной»). В книге используется слово «тензор» вектора (а не «длина»). Такой оборот, как *разложение по трем координатам...*, также пришел из книги Сомова. В «Векториальном анализе» употребляются термины *поле потенциальное*, *соленоидальное*, *вихревое* (с пояснением «самого общего вида») и *лапласово* — вместо «гармоническое». Вся соответствующая терминология теории поля перенесена из иностранной литературы — *curl* и *rot*, *дивергенция*, *градиент* — с редкими переводами на русский язык: «расхождение» (впрочем, чаще все же употребляется «дивергенция»), «источник», «расход струи вектора», «расход векторов через данную поверхность» (это, конечно, *поток* векторного поля), «обильность» (и наряду с этим словом — более «математическое» — «мера»). У Сомова чрезвычайно редки неточности, одна из них встречается при определении градиента, когда он соединяет понятия из векторного анализа и из теории Ламе: «Градиент данной функции или ее дифференциальный параметр первого порядка...» (что, как известно, скалярная величина).

Для произведений векторов Сомов употребляет все имевшиеся тогда названия, он пишет «геометрическое» произведение или «внутреннее», «скалярное» или даже «векториально-геометрическое». В качестве обозначений последовательно используются обозначения Гиббса, т. е. $\nabla \cdot u$ и $\nabla \times u$.

Интересно, что Сомов пытается «обосновать» не только определения скалярного и векторного произведений, но и употребление слова «произведение». В самом деле, сегодня, когда далеко ушли от истоков учения, т. е. когда нет деления векторов, эти операции можно называть как угодно, но почему же «произведение»? Редкий преподаватель не слышит такого вопроса.

На вопрос отвечает Сомов: «Основанием для того, чтобы эти выражения называть произведениями, служит не только то, что

в эти выражения входят тензоры векторов множителями, но также и то, что некоторые свойства алгебраических произведений распространяются на произведения векторов...» [38, с. 25].

Монография завершается таким заключением:

«Обширнейшую область для применения учения о векториальном поле представляет теория электричества и магнетизма. Преимущественно благодаря этому отделу физики векториальный анализ и возник, и получает свое дальнейшее развитие; поэтому если задаваться тем, чтобы представить приложения векториального анализа во всей полноте, нужно было бы значительную часть книги посвятить учению об электростатическом и магнитном полях. Чтобы связать это учение с основными понятиями о векториальном поле, пришлось бы предпослать длинный ряд чисто физических понятий из теории электричества; таким образом, центр тяжести всей книги перенесся бы из области геометрии в область физики, что не соответствовало бы основной задаче всего изложения... по этим соображениям, а также потому, что автор не считает себя специалистом в области электричества, он воздерживается от расширения объема книги в указанном выше направлении» [38, с. 241].

Это заключение может свидетельствовать, вероятно, о том, какое место в истории векторного исчисления П. О. Сомов отводил своему отцу — можно сказать, почетное, но не основное, поскольку О. И. Сомов развивал приложения векторных методов к механике, а П. О. Сомов считал, что согласно исторической картине, основная роль принадлежит физике.

* * *

На рубеже XIX–XX вв. векторное исчисление стало «модой»: первые параграфы некоторых учебников (независимо от «профиля») посвящались векторному исчислению (например, «Курс математики по Серре, Фидлеру, Сальмону», Одесса, 1881/1882; Ch. Hermite «Cours d'analyse de l'Ecole Polytechnique», Paris, 1873), математический педагогический журнал, издаваемый в Варшаве, называли «Вектор»... Но это не обеспечило быстрого распространения исчисления. Лекции Н. Е. Жуковского, например, впервые

литографированные в 1911 г. и изданные в 1937–1950 гг., содержат, конечно, и «силы», и «циркуляции» и пр. и пр., и чертежи, где силы отмечены стрелочками, но «векторов» в лекциях нет: «...есть замыкающая ломаной, составленной из...» «Сложение сил, направленных по одной прямой» рассматривается на трех страницах (с. 191–193). Затем Жуковский переходит к «теореме параллелограмма сил» и занимается ею до 202 страницы. Естественно, доказательство того, что ускорения складываются тоже по правилу параллелограмма, повторяет все эти рассуждения заново. В 30-е гг. XX в. студенты, желающие разобраться в преимуществах-недостатках векторного изложения теоретической механики, слушали параллельно два курса.

Один из страстных пропагандистов векторного исчисления в России, член-корреспондент академии наук Ян Николаевич Шпильрейн издал несколько учебников (один из которых дважды издавался в Германии). Вот выдержка из Предисловия «Векторного исчисления для инженеров-электриков и физиков» (1936): «...Правда, и теперь еще существует оппозиция против векторного исчисления. Совсем недавно нам пришлось заслушать мнение одного из выдающихся ученых о том, что статьи в Технической Энциклопедии „испорчены“ векторным изложением. Но эти отсталые настроения в настоящее время являются исключением. Комитет по высшему техническому образованию ввел элементы векторного исчисления в основную программу математики и рекомендует излагать механику на векторной основе. Уже прошли те времена, когда векторное исчисление считалось необходимым одним только инженерам-электрикам» [44, с. 3].

Сейчас можно только предполагать, с каким анонимным и, видимо, авторитетным оппонентом полемизирует Шпильрейн. Мне показалось, что так он мог бы отозваться об академике А. Н. Крылове. О том, как Крылов относился к векторному исчислению, я спросила ученика Алексея Николаевича. И получила ответ: «Он считал, что векторное исчисление сокращает писание, но не помогает мыслить, иначе говоря, облегчает работу рук, а не головы».

Оптимистические оценки настоящего положения и блистательного будущего векторного исчисления в СССР, высказанные Шпильрейном, были разбиты вдребезги «политическими аргументами».

В 1938 г. он сам был арестован и сгинул в Архипелаге. Один из студентов, слушавший его лекции, Б. А. Розенфельд, вспоминает и выдающегося педагога, и статьи, разоблачающие «хорошо законспирированного» врага народа, особо опасного ввиду его «обаятельно-популярной» личности [19, с. 115].

Другой энтузиаст, много сделавший для «векторизации» преподавания геометрии, — Илья Николаевич Бронштейн — один из авторов популярного справочника «Бронштейн—Семендяев» — также был арестован. Ему вменялось в вину вредительство на ниве просвещения: преподаванием на векторном языке он затруднял понимание материала и наносил вред советскому студенчеству.

Уже из этих примеров видно, что дальнейшая история векторного исчисления в СССР имеет такой же драматический характер, как и история других разделов науки — генетики, кибернетики и прочая, прочая, и прочая...

Празднование столетия открытия кватернионов в Англии было отложено до конца войны.

А в 1945 г. состоялась юбилейная сессия Ирландской академии наук, выпущен том ее трудов, изданы «Избранные сочинения» сэра Уильяма Гамильтона (в трех томах), и на парাপете того моста в Дублине, где Гамильтон 16 октября 1843 г. вырезал закон умножения триплетов, установлена мемориальная доска с теми же символами

$$ijk = -1.$$

Литература

1. Белозеров С. Е. Основные этапы развития общей теории аналитических функций. Ростов н/Д, 1962.
2. Белхост Б. Огюстен Коши / Пер. с франц. А. Дробышева. М., 1997.
3. Боголюбов А. Н. Развитие идей операционного исчисления. Киев, 1972.
4. Богуславский А. Исчисление положения, или изложение геометрии плоскости и пространства. Харьков, 1894.
5. Болотовский Б. М. Оливер Хевисайд. 2-е изд. М.: Книжный дом «Либроком»/URSS, 2012.
6. Больцман Л. Статьи и речи. М.: Наука, 1970.
7. Бурбаки Н. Очерки по истории математики. 4-е изд. М.: Книжный дом «Либроком»/URSS, 2010.
8. Вейль Г. Полвека математики. М. 1969.
9. Вилейтнер Г. История математики от Декарта до середины XIX столетия. 2-е изд. М.: Книжный дом «Либроком»/URSS, 2010.
10. Ганкель Г. Теория комплексных числовых систем, преимущественно обыкновенных мнимых чисел и кватернионов Гамильтона вместе с их геометрическим толкованием. Казань, 1912.
11. Гельмгольц Г. Современное развитие Фарадеевых воззрений на электричество. СПб., 1898.
12. Герц Г. Исследования о распространении электрической силы. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1938.
13. Грассман Г. Чистая математика и учение о протяженности // Новые идеи в математике. СПб., 1913. Вып. 1.
14. Даан-Дальмедико А., Пейффер Ж. Пути и лабиринты. М.: Мир, 1986.
15. Демидов С. С. Джузеппе Пеано и российское математическое сообщество его времени // ИМИ. 2011. Вып. 14(49). С. 25–40.
16. Дженокки А. Дифференциальное исчисление и основы интегрального исчисления, изданные проф. Джузеппе Пеано. Киев; Пб, 1904.
17. Ермаков В. П. Теория векторов на плоскости. Киев, 1887.
18. Игнатовский В. С. Решение некоторых вопросов электродинамики при помощи учения о векторах. СПб., 1902.
19. ИМИ. 1995. Вып. 36. № 1.
20. Каган В. Ф. Основания геометрии. Одесса, 1905.
21. Карцев В. Л. Максвелл. М.: Молодая гвардия, 1967.
22. Клайн М. Математика. Утрата определенности. М.: Мир, 1984.

23. Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. М.; Л.: ОНТИ ГТТИ, 1937.
24. Клайн М. Логика против педагогики // Математика: Сб. науч.-метод. статей. Вып. 3. М.: Высшая школа, 1973.
25. Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей. М.: Наука, 1987.
26. Крамар Ф. Д. Векторное исчисление конца XVIII и начала XIX веков // Историко-математические исследования. М.: Наука, 1963. Вып. 15.
27. Крамар Ф. Д. Молюков И. Д. Иосиф Иванович Сомов (1815–1876), математик, механик, педагог. Алма-Ата, 1965.
28. Лебедев В. И. Исторические опыты по физике. 4-е изд. М.: КомКнига/URSS, 2010.
29. Лебедев В. И. Электричество, магнетизм и электромеханика в их историческом развитии (дофарадеевский период). М.; Л., 1937.
30. Максвелл Дж. К. Статьи и речи. М.: Наука, 1968.
31. Математика XIX века. Геометрия: Сб. статей / Под ред. А. Н. Колмогорова, А. П. Юшкевича. М.: Наука, 1981.
32. Математика XIX века. Математическая логика. Алгебра. М.: Наука, 1978.
33. Медведев Ф. А. Первая монография по функциональному анализу // ИМИ. Вып. 18. М.: Наука, 1973.
34. Полак Л. С. Вильям Роуэн Гамильтон и принцип стационарного действия. Л., 1936.
35. Полищук Е. М. Вито Вольтерра. 2-е изд. М.: Книжный дом «Либроком»/URSS, 2011.
36. Розенбергер Ф. История физики. Т. 3. М.; Л.: 1935; 2-е изд. М.: Книжный дом «Либроком»/URSS, 2010.
37. Ромер П. Э. Основные начала метода кватернёнов. Киев, 1867.
38. Сомов П. О. Векториальный анализ и его приложения. СПб., 1907.
39. Тиле Р. Леонард Эйлер. Киев, 1983.
40. Уилсон М. Американские ученые и изобретатели. М.: Знание, 1975.
41. Умов Н. А. Курс физики. М., 1901, 1903.
42. Фарадей М. Избранные работы по электричеству. М.; Л., 1939.
43. Франкфурт У. И., Френк А. М. Джозайя Виллард Гиббс. М.: Наука, 1964.
44. Шпильерейн Я. Н. Векторное исчисление. М.; Л.: Госиздат, 1925.
45. Штурм Р., Шредер Е., Зонке Л. Германн Грассманн. Его жизнь и учебно-литературная деятельность. М., 1886.
46. Юшкевич А. П. История математики в России. М.: Наука, 1968.
47. Boltzmann L. Vorlesungen über Maxwell's Theorie der Elektrizität und des Lichtes. Leipzig, 1891.
48. Bork A. M. Maxwell and the Vector Potential // Isis. 1967. № 57.
49. Burali-Forti C., Marcolongo R. Notations rationnelles pour le systeme vectoriel minimum proposées par les professeurs C. Burali-Forti et R. Marcolongo. L'Enseignement de mathématique. Paris; Geneve, 1909. № 11.

50. *Cajori F.* A History of Mathematical Notations. Chicago, 1928–1930.
51. *Crowe M.* A History of Vector Analysis. London: Norte Dame, 1967.
52. *Engel F.* Grassmann's Leben. Leipzig, 1911.
53. *Gauss C.F.* Werke. Göttingen. Bd. II. 1863; Bd. VIII. 1900; Bd. X. Abt. 1. 1917.
54. *Gibbs J.W.* The Scientific Papers. London; N.Y.; Bombay, 1906. V.2.
55. *Gibbs J.W., Wilson E.B.* Vector Analysis, a Text-book arranged for the Use of Students of Mathematics and Physics. New-Haven, 1925.
56. *Grassmann H.G.* Gesammelte mathematische und physikalische Werke. Berlin, 1894–1911.
57. *Hamilton W.R.* Elements of Quaternions. N.Y., 1969.
58. *Hamilton W.R.* Lectures on Quaternions. Dublin, 1853.
59. *Hamilton W.R.* The Mathematical Papers. Cambridge, 1967. V.3.
60. *Hankins Th.L.* Sir William Rowan Hamilton. Baltimore and London, 1980.
61. *Heaviside O.* Electro-magnetic Theory. London, 1951.
62. *Heaviside O.* Electrical Papers. London; N.Y., 1892. V.1.
63. The Heaviside centenary volume. London, 1950.
64. *Ignatowsky W. V.* Die Vektoranalysis und ihre Anwendung in der theoretischen Physik. Leipzig; Berlin, 1909.
65. *Kennedy H.C.* Life and Works of Giuseppe Peano. Dordrecht; Boston; London, 1980.
66. *Kennedy H.C.* The Origins of Modern Axiomatics: Pasch to Peano // American mathematical monthly. 1972. V.79.
67. *Knott C.G.* Life and scientific Work of Peter Guthrie Tait. Cambridge, 1911.
68. *Knott C.G.* Vector Analysis upon the Lectures of professor J. Willard Gibbs. By Dr. Edwin Wilson // Phil. Mag. 1902. № 4.
69. *Maxwell J.C.* A Treatise on Electricity and Magnetism. London, 1873.
70. *Monna A.F.* Functional Analysis in Historical Perspective. Utrecht, 1973.
71. *Peano G.* Opere scelte. Roma, 1959. V. III.
72. *Peano G.* Die Grundzüge des geometrische Calculus. Leipzig, 1891.
73. *Peano G.* Selected Works. Toronto; Buffalo, 1973.
74. *Petrova S.* Heaviside and the Development of Symbolic Calculus // Archive for Hist. of Ex. Sci. 1987. V.37. P.1–23.
75. *Siegmund-Schultze R.* Die Anfänge der Funktionalanalysis und ihre Platz im Umwälzungsprozess der Mathematik um 1900// Archive for Hist. of Ex. Sci. 1982. V.26.
76. *Tait P.G.* An elementary Treatise on Quaternions. London, 1875.
77. *Taylor A.E.* A Study of Maurice Fréchet // Archive for Hist. of Ex. Sci. 1982. V.27.
78. *Wheeler J.* Josiah Willard Gibbs. New-Haven, 1951.
79. *Wilson E.B.* A Commentary of the Scientific Writings of J. Willard Gibbs. London, 1936.

Именной указатель

- А**бель (Abel Niels Hendrik, 1802–1829) 223
- Абрагам (Abraham Max, 1875–1922) 207
- Адамар (Hadamard Jacques Salomon, 1865–1963) 207, 219
- Амодео (Amodeo Federigo, 1859–1946) 191
- Ампер (Ampere André-Marie, 1775–1836) 69, 71, 72, 77
- Араго (Arago Dominique Franois, 1786–1853) 69
- Арган (Argand Jean Robert, 1768–1822) 18, 209, 215
- Арцела (Arzela Cesare, 1847–1912) 225
- Асколи (Ascoli Guisto, 1843–1896) 225
- Б**альцер (Baltzer Richard, 1818–1887) 161
- Банах (Banach Stefan, 1892–1945) 219, 230
- Бассо (Basso Giuseppe, 1842–1895) 203
- Башмакова Изабелла Григорьевна (1921–2005) 5, 8, 9
- Бейтмен (Bateman Harry, 1882–1946) 114
- Белл (Bell Alexander, 1847–1922) 71
- Беллавитис (Bellavitis Guisto, 1803–1880) 19, 194, 198, 208
- Берг (Berg Ernst Julius, 1871–1941) 114
- Беркли (Berkley George, 1685–1753) 27
- Бернулли Д. (Bernoulli Daniel, 1700–1782) 9, 68, 200
- Бернулли И. (Bernoulli Iohann, 1667–1748) 9, 10, 200
- Бернштейн Ф. (Bernstein Felix, 1878–1956) 222
- Бессель (Bessel Friedrich Wilhelm, 1784–1846) 12
- Бетч (Betsch Christian, 1888–1934) 166
- Бине (Binet Jacques Philippe Marie, 1786–1856) 34
- Био (Biot Jean Baptist, 1774–1862) 69
- Бойяи (Boljai Janos, 1802–1860) 26
- Болл (Ball Robert Stawell, 1840–1913) 4, 167, 207
- Больцано (Bolzano Bernhard, 1781–1848) 216
- Больцман (Boltzmann Ludwig, 1844–1906) 129–133, 137, 138, 240, 241
- Бомбелли (Bombelli Rafael ок. 1526–1573) 7
- Борк 149
- Бретшнайдер (Bretschneider Carl Anton, 1808–1878) 161
- Брио (Briot Charles August Albert, 1817–1882) 186
- Бромвич (Bromwich Thomas John, 1875–1929) 113
- Бронштейн Илья Николаевич (1903–1976) 253
- Буке (Bouquet Jean Claude, 1819–1885) 186
- Буль (Boole George, 1815–1864) 104, 188, 224

- Бунзен (Bunzen Robert Wilhelm, 1811–1899) 85
- Буныковский Виктор Яковлевич (1804–1889) 32
- Бурали-Форти (Burali-Forti Cesare, 1861–1931) 164, 197, 208
- Бусинеск (Boussinesq Joseph, 1842–1926) 185
- Бухерер (Bucherer Alfred Heinrich, 1863–1927) 206, 231
- Бэкон (Bacon Francis, 1561–1626) 67
- Бюз (Buee Adrien Quentin, 1748–1826) 18, 22
- Вагнер** (Wagner Karl Willy, 1883–1953) 114
- Валлис, Уоллис (Wallis John, 1616–1703) 8, 22
- Ван-дер-Ваальс (Van der Waals Johannes Diderik, 1837–1923) 85
- вант-Гофф (Van't Hoff J. Hendricus, 1852–1911) 85
- Вашенко-Захарченко Михаил Егорович (1825–1912) 235
- Вебер В. (Weber Wilhelm Eduard, 1804–1890. 1891?) 69, 70, 128, 134
- Вебер Г. (Weber Heinrich, 1842–1913) 78
- Вебстер (Webster Artur Gordon, 1863–1923) 244
- Вейерштрасс (Weierstrass Karl Theodor, 1815–1897) 6, 36, 85, 219, 223
- Вейль (Weil Hermann, 1885–1955) 192, 219, 228
- Вессель (Wessel Caspar, 1745–1818) 14–17, 23
- Виет (Francois Viète, 1540–1603) 8, 9
- Вин (Wien Wilhelm, 1864–1928) 130
- Винер (Wiener Norbert, 1894–1964) 219, 230
- Вихерт (Wiehert Johann Emil, 1861–1928) 79
- Вольта (Volta Alessandro, 1745–1827) 68
- Вольтерра (Volterra Vito, 1860–1940) 186, 219, 222–225, 227, 229
- Вронский (Wronski Joseph Hoene, 1778–1853) 186
- Галилей** (Galilei Galileo, 1564–1642) 67, 180
- Гальвани (Galvani Aloisio, 1737–1798) 68
- Гамильтон (Hamilton William Rowen, 1805–1865) 16, 19, 22, 30, 37, 44–56, 59, 63, 75, 81, 82, 89, 90, 92, 95, 99–101, 123, 140, 145, 151, 152, 159, 161, 163, 166, 174, 194, 195, 198, 202, 205, 208, 211–215, 233–236, 249, 253
- Ганкель (Hankel Hermann, 1839–1873) 39, 49, 163, 164, 166, 170, 174, 175
- Ганс (Gans Richard, 1880–1954) 130, 247
- Гаусс (Gauss Karl Friedrich, 1777–1855) 8, 12, 19–23, 27, 34, 40, 61, 69, 70, 79, 82, 162, 163, 175
- Гедель (Gödel Kurt, 1906–1978) 193
- Гельмгольц (Helmholtz Hermann Ludwig Ferdinand, 1821–1894) 56, 60, 74, 85, 87, 128, 130, 134, 136, 240
- Гельфонд Александр Осипович (1906–1968) 192
- Герц (Hertz Heinrich, 1857–1894) 56, 85, 104, 110, 128, 130, 133–137, 139, 206, 240, 241

- Гиббс (Gibbs Josiha Willard, 1839–1903) 4, 50, 75, 81, 84–101, 116, 120, 122–125, 131, 140–143, 149, 160, 172, 196, 202, 205, 209, 225, 239, 244, 249
- Гильберт (Hilbert David, 1862–1943) 53, 185, 191–193, 224, 226–232
- Грассман Г. (Grassmann Hermann, 1809–1877) 4, 19, 41, 87–91, 97, 100, 140, 156, 158–166, 168, 170–175, 177, 187, 192–210, 212, 215–217, 247, 248
- Грассман Р. (Grassmann Robert, 1815–1901) 163
- Грейвс Дж. Т. (Graves John Thomas, 1806–1870) 22, 24, 27, 33, 35, 89
- Грейвс Ч. (Graves Charles, 1810–1860) 24, 27
- Грин (Green George, 1793–1841) 82
- Гротенфенд (Grotefend Georg Friedrich, 1775–1853) 80
- Гумбольдт (Humboldt Alexandr von, 1769–1859) 69
- Гурвиц (Hurwitz Adolf, 1859–1919) 38, 176
- Давидов Август Юльевич (1823–1886) 236
- Даламбер (d'Alembert Jean le Rond, 1717–1783) 10, 11, 24
- Дарбу (Darbou Jean Gaston, 1842–1917) 85, 97
- Дарвин (Darwin Charles, 1839–1882) 87
- Дедекинд (Dedekind Richard, 1831–1916) 182, 193
- Декарт (Descartes René, 1596–1650) 4, 8, 76, 194
- Деларю Даниил Михайлович (1839–1905) 236
- Ден (Dehn Max, 1878–1952) 190
- Дёч Г. 222
- Дженокки (Genocci Angelo, 1817–1889) 178, 179, 183
- Джефрис (Jeffreys Harold, 1891–1989) 114
- Джилльберт (Gilbert William, 1544–1603) 67
- Джоуль (Joule James Prescott, 1818–1889) 54
- Дилнер (Dillner Goren, 1832–1906) 166
- Дирак (Dirac Paul Adrien Maurice, 1902–1948) 115
- Дирихле (Dirichlet Peter Gustav Lejeune, 1805–1854) 184
- Дьедонне (Dieudonne Jean Alexandre, 1906–1992) 197
- Дэви (Davy Humphry, 1778–1829) 68
- Дюамель (Duhamel Jean Marie Constant, 1797–1872) 85
- Дюбуа Раймон (Du Bois Reymond Paul, 1831–1889) 223
- Ермаков Василий Петрович (1845–1922) 235
- Ж**ергонн (Gergonne Joseph Diez, 1771–1859) 18
- Жирар (Girard Albert, 1595–1632) 8
- Жордан (Jordan Camille, 1838–1922) 185
- Жуковский Николай Егорович (1847–1921) 251, 252
- З**аменгоф Лазарь (Людовик) Маркович (1859–1917) 182
- Зейлигер Дмитрий Николаевич (1864–1936) 235

Зернов Николай Ефимович
(1804–1862) 87

Зигмунд-Шульце 224

Зоммерфельд (Sommerfeld Arnold,
1868–1951) 159

Зонке (Sohncke Leonhard,
1842–1897) 164

Игнатовский Владимир Сергеевич
(1875–1943) 243, 245, 247

Кавендиш (Cavendish Henri,
1731–1810) 65, 66

Каган Вениамин Федорович
(1869–1953) 165, 189, 191, 192

Каменский Георгий Александрович
(р. 1925) 5

Кант (Kant Immanuel, 1724–1804) 27

Кантор Г. (Cantor Georg Ferdinand
Ludwig Philipp, 1845–1918) 85,
182, 185, 224, 225

Кантор М. (Cantor Moritz,
1829–1920) 182

Карвалло (Carvallo Emmanuel,
1856–1945) 204

Кардано (Cardano Girolamo,
1501–1576) 7, 13

Карно (Carnot Lazare Nicolas
Margerite, 1753–1823) 8, 18,
20, 237

Карсон (Carson John Renshaw,
1887–1940) 113, 114

Картан (Cartan Elie, 1869–1951) 172,
175, 177

Кассина (Cassina Ugo, 1897–1964)
181, 182, 197

Келлэнд (Kelland Philipp, 1808–1879)
43, 56, 57

Кеннеди (Kennedy Hubert) 180, 181,
183, 192, 197

Кеплер (Kepler Johann,
1571–1630) 67

Кирхгоф (Kirchhoff Gustav Robert,
1824–1887) 85, 87, 130

Клайн (Kline Morris) 5

Клаузиус (Clausius Rodolf Julius,
1822–1888) 87

Клебш (Clebsch Rudolf Friedrich
Alfred, 1833–1872) 90, 164

Клейн (Klein Felix, 1849–1925) 7, 13,
20, 21, 38, 52, 55, 87, 96, 130,
164, 207, 215, 248

Клеро (Clairaut Claude Alexis,
1713–1765) 61

Клиффорд (Clifford William Kingdom,
1845–1879) 4, 77, 79, 90, 202

Клюгель (Klugel Georg Simon,
1739–1812) 24

Ковалевский Г. (Kowalewski Gerhard,
1876–1950) 231

Кольрауш (Kohlrausch Friedrich
Wilhelm Georg, 1840–1910) 70

Коперник (Kopernik Nicola,
1473–1543) 67

Котельников Александр Петрович
(1865–1944). 4

Коутс, Котс, Котес (Cotes Roger,
1682–1716) 9

Кох фон (Koch Helge von,
1870–1924) 227

Коши (Cauchy, Luis Augustin,
1789–1857) 6, 12–14, 34, 40,
61, 90, 180, 186, 209, 223

Кравец Торичан Павлович
(1876–1955). 74

Крамерс (Kramers Hendrik Antjny,
1894–1952) 97

Крелле (Crelle August Leopold,
1780–1855) 164

Кристоффель (Cristoffel Elwin,
1829–1900) 175

Кронекер (Kronecker Leopold,
1823–1891) 62, 85

Кроу (Crowe Michael) 160, 163, 164,
206, 243, 248

Крылов Алексей Николаевич
(1863–1945) 252

Кулон (Coulomb Charles Augustin,
1736–1806) 66, 68

Куммер (Kummer Ernst, 1810–1893)
160, 162

Кундт (Kundt August Adolf Eduard,
1839–1894) 85

Кэли (Cayley Arthur, 1821–1895) 34,
35, 51, 54, 79, 87, 89–91, 100,
156, 157, 175

Кэмпбелл (Campbell Lewis,
1830–1908) 54

Кюн (Kuhn Heinrich, 1690–1769) 9

Лагерр (Laguerre Edmond Nicolas,
1834–1886) 217, 220

Лагранж (Lagrange Joseph Louis,
1736–1813) 12, 32, 61,
212, 237

Лакруа (Lacroix Sylvestre Franssois,
1765–1843) 11, 18

Ламберт (Lambert Johann Heinrich,
1728–1777) 45

Ламе́ (Lamé Gabriel, 1795–1870) 78,
79, 82, 93, 195, 210, 239, 250

Ланжевэн (Langevin Paul,
1872–1946) 207

Лаплас (Laplace Pierre Simon de,
1749–1827) 61, 104, 112, 148,
222, 223

Лармор (Larmor Joseph,
1857–1942) 104

Лебег (Lebesgue Henri, 1875–1941)
185, 230

Лебедев Василий Иванович 68

Леви (Lévy Paul Pierre,
1889–1972) 221

Лежандр (Legendre Andre Marie,
1752–1833) 18, 59

Лейбниц (Leibnitz Wilhelm Gottfried,
1646–1716) 6, 7, 9, 10, 178,
188, 200, 203, 237

Летце (Lotze Alfred, 1882–1964) 166

Ли (Lie Sophus, 1842–1899) 4, 17

Липшиц (Lipschitz Rudolf Otto
Sigismund, 1832–1903) 186

Литтлвуд (Littlewood John Edensor,
1885–1977) 214

Лиувилль (Liouville Joseph,
1809–1882) 85, 185, 223

Лихтенберг (Lichtenberg Georg
Christoph) 1742
(1744?)–1799 69

Ллойд (Lloyd Humphry, 1800–1881)
27, 32

Лодж (Lodge Olliver Joseph,
1851–1940) 104, 107

Лоран (Laurent Pierre Alphonse,
1813–1854) 221

Лоренц (Lorenz Antoon Hendrik,
1853–1928) 87, 131, 206

Лориа (Loria Gino, 1862–1954) 207

Луcreций Тит (ок. 99–55 гг.
до н.э.) 66

Люрот (Luroth Jacob,
1844–1910) 87, 203

Майкельсон (Michelson Albert
Abraham, 1852–1931) 87

Маколей (McAulay Alex, 1863–1931)
139, 148, 153, 155

Максвелл (Maxwell James Clerk,
1831–1879) 40, 44, 54–56, 59,
62–66, 70–83, 85, 87, 88, 90,
92, 103, 115–117, 121, 123–125,
127–140, 145, 149, 153, 158,
201, 206, 240–244, 249

Максимович Владимир Павлович
(1850–1889) 26, 236

Макфарлан (Macfarlane Alexander,
1851–1913) 81, 144, 147–149,
203, 211

Марколонго, Марколоньо
(Marcolongo Roberto,
1862–1943) *173, 204, 205, 207*

Маркушевич Алексей Иванович
1908–1979 *13*

Массо (Massau Junius, 1852–1909)
197, 202, 238

Мёбиус (Mebius August Ferdinand,
1790–1868) *4, 40, 45, 90,
161–163, 194, 195, 197, 198,
200, 203, 204, 208*

Милликен (Millikan Robert Andrew,
1868–1953) *73*

Минчин (Minchin George,
1845–1914) *150*

Монж (Monge Gaspard,
1746–1818) *237*

Монна (Monna A. F.) *4, 219*

Морган, де (Morgan Augustus de,
1806–1871) *24, 32, 33, 35*

Морзе (Morse Samuel Phinley,
1791–1872) *70*

Муавр, де (Moivre Abraham de,
1667–1754) *10*

Мурей (Mourey C. V.) *18, 19*

Набхольц П. *232*

Нейман Дж. (Neumann John von,
1903–1957) *228, 230, 232*

Нейман К. (Neumann Karl Gottfried,
1832–1925) *128, 130*

Нотт (Knott Cargial Guilston,
1856–1922) *21, 54, 56, 59, 63,
80–82, 95, 139, 143, 144,
146–149, 151, 152, 156, 158,
210–215, 244*

Ньютон (Newton Isaac, 1643–1727) *9,
32, 46, 67, 86, 102, 104, 237*

Ом (Ohm Georg, 1787–1854) *69*

Оствальд (Ostwald Wilhelm Friedrich,
1853–1932) *87*

Остроградский Михаил Васильевич
(1801–1862) *32, 61, 62, 79*

Падоа (Padoa Alessandro,
1868–1937) *191*

Пайерл (Peierls Rudolf Ernst,
1907–1995) *83*

Паш (Pasch Moritz,
1843–1930) *190, 217*

Пеано (Peano Giuseppe, 1858–1932)
*52, 178–204, 207, 208, 212,
215, 217–220, 224, 229, 230,
238, 248*

Перри (Perry John, 1850–1920) *114*

Пиери (Pieri Mario, 1860–1913) *191*

Пикар (Picard Charles Emile,
1856–1941) *185*

Пинкерле (Pincherle Salvatore,
1853–1936) *192, 217, 219–227,
229, 231, 232*

Пирс Б. (Peirce Benjamin, 1809–1880)
89, 90, 176, 215

Пирс Ч. (Peirce Charles Sanders,
1839–1914) *176*

Планк (Planck Max Karl Ernst Ludwig,
1858–1947) *244*

Пларр (Plarr Gustav, 1819–1892) *59*

Плиний Старший (23–79) *66*

Плюккер (Plucker Julius, 1801–1868)
4, 170

Пойнтинг (Poynting John,
1852–1914) *108*

Понселе (Poncelet Jean Victor,
1788–1867) *238*

Попов Александр Степанович
(1859–1905) *135*

Прандтль (Prandtl Ludwig,
1875–1953) *207*

Прингсхейм (Pringsheim Alfred,
1850–1941) *178, 183, 184*

Присс *108*

- Пуанкаре (Poincare Henri,
1854–1912) 4, 5, 85, 114,
227, 244
- Пуассон (Poisson Simeon Denis,
1781–1840) 62, 69
- Пфафф (Pfaff Johann Friedrich,
1765–1825) 177
- Пюизье (Puisieux Victor Alexandre,
1820–1853) 61
- Р**амануджан (1887–1920) 104
- Рассел (Russel Bertrand, 1872–1970)
182, 188, 189
- Рахманинов Иван Иванович
(1826–1897) 87, 235
- Резаль (Resal Henri Ame, 1828–1896)
18, 196, 199, 209, 238–240
- Риман (Riemann Bernhard,
1826–1866) 6, 78, 164
- Рисс (Riesz Friguesz, 1880–1956) 192,
219, 229, 230
- Рихман Георг Вильгельм
(1711–1753) 68
- Риччи (Ricci Gregorio Curbastro,
1853–1952) 114
- Розенфельд Борис Абрамович
(1917–2008) 253
- Ромер Павел Эмильевич
(1835–1899) 49, 233–236
- Рэлей (Rayleigh John William
1842–1919) 87, 104
- С**авар (Savart Felix, 1791–1841) 69
- Сен-Венан (Saint-Venant Ademar
Jean Claude Barre de,
1797–1887) 18, 90, 237
- Сервуа (Servois Francois Joseph de,
1767–1847) 18, 23
- Серре (Serret Joseph Alfred,
1819–1885) 183, 251
- Сильвестр (Sylvester James Joseph,
1814–1897) 54, 87, 90
- Скубачевский Александр
Леонидович 5
- Слешинский Иван Владимирович
(1854–1931) 236
- Смит Д. (Smitt George) 80
- Смит Р. (Smitt Robert) 80
- Сомов Осип Иванович (1815–1876)
88, 209, 236, 238, 245, 249, 251
- Сомов Павел Осипович (1852–1919)
207, 240, 248–251
- Сохоцкий Юлиан Васильевич
(1842–1927) 236
- Стеклов Владимир Андреевич
(1864–1926) 207, 244
- Стефан (Stefan Joseph, 1835–1893)
130, 244
- Стефанос (Stephanos Ciparisos,
1857–1917) 96
- Стокс (Stokes George Gabriel,
1819–1903) 42, 54, 60–62, 79,
82, 87
- Столетов Александр Георгиевич
(1839–1896) 66, 138, 240
- Стюарт 54
- Суинберн (Swinburn James,
1858–1958) 112, 126, 149, 158
- Т**арский (Tarski Alfred,
1901?–1983) 192
- Тарталья (Tartaglia Nicolas,
1500–1557) 7
- Тейлор (Taylor Brook, 1685–1731)
186, 194, 221
- Тимченко Иван Юрьевич
(1862–1939) 236
- Тиндаль (Tyndall John,
1820–1893) 73
- Томсон (Thomson Joseph John,
1856–1940) 87

Томсон, с 1893 г. лорд Кельвин
(Thomson William, 1824–1907)
*54–56, 77, 82, 87, 104, 109,
134, 140, 153*

Трикоми (Tricomi Francesco,
1897–1978) *181*

Тэт (Tait Peter Guthrie, 1831–1901) *21,
33, 43, 46, 49, 50, 54–64, 75,
77–82, 87, 91, 95, 97, 101,
116–119, 123, 126, 139–141,
143–155, 157–159, 205, 214,
233, 235, 247*

Уайтхед (Whitehead Alfred North,
1861–1947) *188, 207*

Уилсон (Wilson Edwin Bidwell,
1879–1964) *88, 92, 94, 95, 97,
98, 100, 123, 146, 147, 206,
207, 212, 214, 215, 225*

Уиттеккер (Whittaker Edmund Taylor,
1873–1956) *104, 114*

Уитстон (Wheatstone Charles,
1802–1875) *70, 103, 116*

Умов Николай Алексеевич
(1846–1914) *240–243*

Уоррен (Warren John, 1796–1852) *18,
19, 22, 33*

Фаа ди Бруно (Faa di Bruno
Francesco, 1825–1888) *40, 180*

Фарадей (Faraday Michael,
1791–1867) *27, 71–74,
76, 77, 128*

Ферма (Fermat Pierre, 1601–1665) *12*
Фёппль (Föppl August, 1854–1924)
94, 137, 206, 243, 248, 249

Фицджеральд (FitzGerald George Fran
1851–1901) *87, 104, 106, 110,
111, 139, 149*

Фишер (Fischer Ernst,
1875–1959) *230*

Франклин *241*

Франсэ (Francais Jaques Frederik,
1775–1833) *18*

Фрере (Frege Gottlob, 1848–1925)
184, 224

Фредгольм (Fredholm Eric Ivar,
1866–1927) *192, 224, 226*

Френд (Frend William, 1757–1841) *24*

Фреше (Frechet Maurice, 1878–1973)
192, 222, 224–226, 232

Фробениус (Frobenius Georg Ludwig,
1849–1917) *89, 100, 175–177*

Фурье (Fourier Joseph Jean Baptist,
1758–1830) *104, 115, 226, 227*

Фусс (Fuss Nicolas, 1810–1867) *32*

Хаусдорф (Hausdorff Felix,
1868–1942) *226*

Хевисайд (Heaviside Oliver,
1850–1925) *75, 77, 81, 87, 88,
94, 97–99, 101–127, 129, 134,
136–141, 143, 145, 147–156,
158, 159, 196, 205, 206, 214,
239, 243–249*

Хейн (Heun, Karl Ludwig,
1859–1926) *215*

Хелли (Helly Eduard, 1884–1943)
229, 232

Хенричи, Хенрики (Henrici Olaus
Магнус, 1840–1918) *172*

Хилл (Hill George William,
1838–1914) *227*

Хэнкинс (Hankins Thomas L.) *32*

Цермело (Zermelo Ernst Friedrich
Ferdinand, 1871–1953) *187*

Цивет (Zivert Alexander, 1853–1928)
87, 239

Чезаро (Cesaro Ernesto,
1859–1906) *185*

Чижов Дмитрий Семенович
(1785–1853) *239*

- Шаль** (Chales Michel, 1793–1880) 85
- Шампольон** (Shampolion Jean Francois, 1790–1832) 80
- Шаппер** (Schapper H) 215
- Шварц** (Schwarz Karl Germann Amandus, 1843–1921) 183
- Шепп** (Schepp Adolf, 1837–1905) 194
- Шеффер** (Scheeffer Ludwig, 1859–1885) 223
- Шёнфлис** (Shönflies Arthur Moritz, 1853–1928) 229
- Шлегель** (Schlegel Stanislaus Ferdinand Victor, 1848–1905) 87, 88
- Шлеер** (Schleyer Johann Martin, 1831–1912) 182
- Шмидт** (Schmidt Erhard, 1876–1959) 192, 229–232
- Шпильрейн Ян Николаевич** (1887–1939) 233, 234, 252, 253
- Шредер** (Schröder Kurt E. F. K., 1841–1902) 164, 182, 188, 193, 217
- Штаудт** (Staudt Karl Georg Christian von, 1798–1867) 4
- Штольц** (Stolz Otto, 1842–1905) 217
- Штуди** (Shtudy Eduard Cristian Hugo, 1862–1930) 231
- Штурм** (Sturm Rudolf, 1841–1919) 164
- Шумахер** (Schumacher Heinrich Christian, 1780–1850) 12
- Эдисон** (Edison Thomas Alva, 1847–1941) 71
- Эйлер** (Euler Leonhard, 1707–1783) 8–12, 33, 68, 112, 183, 186, 237
- Эйнштейн** (Einstein Albert, 1879–1955) 73
- Энгель** (Engel Friedrich, 1861–1941) 87, 199
- Эндрюс** (Andrews Thomas, 1813–1885) 54
- Эренфест** (Ehrenfest Paul, 1880–1933) 129, 132
- Эрмит** (Hermite Charles, 1822–1901) 175, 183, 217
- Эрстед** (Oersted Hans Christian, 1777–1851) 69
- Юнг** (Joung W. H., 1863–1942) 99, 226
- Якоби** (Jacobi Carl Gustav Jacob, 1804–1851) 31, 59, 163, 175
- Якоби Б. С.** (1801–1874) 70